Model 1 test admitere

1. Trinomul
$$x^2+2ax+4, a\in\mathbb{R}$$
are rădăcinile reale strict pozitive dacă:
(a) $a\leq 0$ şi $a^2>2$; (b) $a\geq 0$; (c) $a\in(-\infty,-2]$; (d) $a\in[2,\infty)$.
Soluţie. Impunem condiţiile $\Delta=4(a^2-4)\geq 0\Rightarrow a\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$,
$S=-2a>0\Rightarrow a<0, P=4>0$.
Răspuns corect (c).

2. Valorile parametrului real m pentru care ecuaţia
$$(m-1)x^2-(m+1)x+m+1=0$$
are rădăcină dublă sunt:
(a) $m\in(1,\infty)$; (b) $m\in\left(1,\frac{5}{3}\right)$; (c) $m\in\left\{1,\frac{5}{3}\right\}$; (d) $m\in\left\{-1,\frac{5}{3}\right\}$.
Soluţie. $\Delta=(m+1)^2-4(m+1)(m-1)=-3m^2+2m+5$, $-3m^2+2m+5=0\Rightarrow m\in\left\{-1,\frac{5}{3}\right\}$.
Răspuns corect (d).

3. Mulţimea căreia îi aparţin toate soluţiile ecuaţiei
$$\ln x^3+\ln x=4$$
este:
(a) $(1,\infty)$; (b) $(1,2)$; (c) $(-\infty,1)$; (d) $\{-1,1\}$.
Soluţie. $4\ln x=4\Rightarrow x=e$.
Răspuns corect (a).

4. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei
$$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=6^x+6^{x+1}$$
este:
(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3.
Soluţie. $2^x\left(1+2+2^2\right)=6^x\left(1+6\right)\Rightarrow 2^x=6^x\Rightarrow x=0$.
Răspuns corect: (b).

5. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei:

$$\log_5 x^2 = \log_5(3x-2)$$

este:

(a) $x \in \{-1, 0\}$; (b) $x \in \left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}$; (c) $x \in (1, 2)$; (d) $x \in \{1, 2\}$.

Soluţie. $x \neq 0, x > \frac{2}{3}, x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1.$

Răspuns corect: (d).

6. Numărul 1 este pentru polinomul

$$x^8 - 4x^5 + 4x^3 - 1,$$

rădăcină multiplă de ordin:

(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.

Soluţie. $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0, P'''(1) \neq 0.$

Răspuns corect: (c).

7. Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomială:

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}\right)^{90}$$

este:

(a) 15; (b) 14; (c) 17; (d) 16.

Soluţie. $T_{k+1} = C_{90}^{k}(\sqrt{3})^{90-k}(\sqrt[3]{2})^{k} = C_{90}^{k}3^{\frac{90-k}{2}}2^{\frac{k}{3}} \Rightarrow k = 6l,\ 0 \leq 6l \leq 90 \Rightarrow l = \left[\frac{90}{6}\right] + 1 = 16.$

Răspuns corect (d).

8. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3 - qx + p = 0, p, q \in \mathbb{R}$. Valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix},$$

este:

(a) 0; (b) 2; (c) 4; (d) $3p$.

Soluţie. Fie $s = x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calculăm determinantul adunând toate liniile (coloanele) la o linie (coloană) şi obţinem valoarea 0.

Răspuns corect: (a).

9. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - mx_3 = -m \\ 3x_1 + x_2 + (m-1)\,x_3 = 0 \end{cases}$$

Toate valorile lui m pentru care sistemul este incompatibil aparţin mulţimii:
(a) $(0,1)$; (b) $(-1,0)$; (c) $\varnothing$; (d) $(2,\infty)$.

Soluţie.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 3 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 4m-4.$$
Se observă că pentru $m \neq 1$ sistemul este compatibil determinat.
Pentru $m = 1$ obţinem soluţia $x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_3, x_2 = \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}$,compatibil nedeterminat.
Răspuns corect: (c).

10. Fie $M = \{x; x \in \mathbf{R}, x \geq 1\}$ şi operaţia internă

$$x * y = xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}, \forall x, y \in M.$$

Elementul neutru şi elementul invers sunt:
(a) elementul neutru este 1, singurul element care are invers este 1.
(b) elementul neutru este 1, nici un element nu are invers.
(c) nu există element neutru.
(d) elementul neutru este 1, toate elementele sunt inversabile.

Soluţie. Determinăm elementul neutru $e : x * e = x, \forall x \in M \Rightarrow$ $xe + \sqrt{(x^2-1)(e^2-1)} = x, \forall x \in M \Rightarrow e = 1$. 1 are invers: $1 * 1 = 1$ (inversul lui 1 este 1). Dacă $x > 1 \Rightarrow x * y = xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)} \geq xy \geq x > 1$, $\forall y \in M$. Deci oricare element diferit de 1 nu are invers.
Răspuns corect (a).

11. Fie
$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right).$$

Atunci:
(a) $l = 1$; (b) $l = \frac{1}{2}$; (c) $l = 0$; (d) $l = \infty$.

Soluţie. Utilizăm formula $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n\,(n+1)$.
Răspuns corect: (b).

12. Mulţimea de definiţie a funcţiei

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} + \ln(2+x)$$

este:

(a) $[2,3)$; (b) $[-2,\infty)$; (c) $[1,2]$; (d) $[2,\infty)$.

Soluţie. $x^2-4\geq 0, 2+x>0$

Răspuns corect: (d).

13. Valoarea limitei

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)-\ln\left(1+x+x^2\right)}{x}$$

este:

(a) 3; (b) 2; (c) -1; (d) -2.

Soluţie. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x+x^2\right)-\ln\left(1+x+x^2\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1-\frac{2x}{1+x+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=-2$ sau l'Hôspital.

Răspuns corect (d).

14. Valorile reale ale constantelor a, b pentru care funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^2+bx, & x\leq 2,\\ ax^3+4b, & x>2,\end{cases}$$

este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ sunt:

(a) $a=0, b=-1$; (b) $a=\dfrac{1}{2}, b=-2$; (c) $a=\dfrac{2}{3}, b=-2$; (d) $a=\dfrac{3}{4}, b=1$.

Soluţie. Continuitatea în 2 implică $8+2b+c=16a+11a$, derivabilitatea în 2 implică $8=24a$

$\begin{cases}8+2b=8a+4b\\ 8+b=12a\end{cases}$ $\left[a=\frac{3}{4}, b=1\right]$

Răspuns corect: (d).

15. Fie funcţiile f şi g definite pe $\mathbb{R}$ cu valori reale astfel încât

$$f(x)=(x+2)g(x), \forall x\in\mathbb{R},$$

g funcţie derivabilă în origine, $g(0)=2$ şi $g'(0)=-1$. Atunci valoarea lui $f'(0)$ este:

(a) -2; (b) 2; (c) -1; (d) 0.

Soluţie. Se calculează $f'(x)=g(x)+(x+2)g'(x)\Rightarrow f'(0)=0$.

Răspuns corect (d).

16. Derivata funcţiei:

$$f:\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\to\mathbf{R}, f(x)=\arccos(\sin x)$$

este:

(a) 1; (b) $\cos x$; (c) $\sin x$; (d) -1.

Soluţie. $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x=1, x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).$

Răspuns corect: (a).

17. Fie funcţia

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\max\left\{e^x,e^{-x}\right\}.$$

Valoarea integralei

$$I=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$

este:

(a) $I=0$; (b) $I=1$; (c) $2(e-1)$; (d) $I=3$.

Soluţie. Explicităm funcţia:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{pentru } 0\le x\le 1\\ e^{-x} & \text{pentru } -1\le x<0\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$I=\int_{-1}^{0}e^{-x}dx+\int_{0}^{1}e^{x}dx=-(1-e)+(e-1)=2(e-1).$$

Răspuns corect (c).

18. Fie mulţimea

$$\mathbf{M}=\left\{x\mid x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\quad\text{şi}\quad 4|\sin x|\cos x=1\right\}.$$

Numărul de elemente ale mulţimii $\{x+y\mid x,y\in\mathbf{M}\}$ este:

(a) 5; (b) 6; (c) 7; (d) 9.

Soluţie. Pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ ecuaţia devine $\sin 2x=-\frac{1}{2}$ cu soluţiile $-\frac{\pi}{12}$ şi $-\frac{5\pi}{12}$ iar pentru $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia devine $\sin 2x=\frac{1}{2}$ cu soluţiile $\frac{\pi}{12}$ şi $\frac{5\pi}{12}$.

$\mathbf{M}=\left\{-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right\},$

$\{x+y\mid x,y\in\mathbf{M}\}=\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6},0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}.$

Răspuns corect (d).

19. Distanţa de la origine la dreapta $4x+3y-12=0$ este:

(a) $\frac{12}{5}$; (b) 4; (c) $\frac{5}{2}$; (d) 1.

Soluţie. Intersecţia cu axele de coordonate $(4,0)$ si $(0,3)$. Se formează un triunghi dreptunghic cu catetele 4 şi 3 şi ipotenuza 5. Distanţa este înălţimea triunghiului corespunzătoare ipotenuzei $\dfrac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}$.

Răspuns corect (a).

20. Numărul punctelor de intersecţie dintre dreapta $2x+y=5$ şi cercul $x^2+y^2=5$ este:

(a) 2; (b) 4; (c) 1; (d) 3.

Soluţie.

$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow [x=2, y=1]$.

Răspuns corect (c).

21. Fie polinomul $f=x^4+6x^3+8x^2+ax+b$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4. Valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât x_1,x_2,x_3 să fie în progresie aritmetică şi $x_4=x_1+x_2+x_3$, sunt:

(a) $a=6, b=9$; (b) $a=9, b=6$; (c) $a=-6, b=9$; (d) $a=-6, b=-9$.

Soluţie. Fie $x_1=\alpha-r$, $x_2=\alpha$, $x_3=\alpha+r$ (în progresie aritmetică). Atunci $x_4=3\alpha$. Scriem relaţiile lui Viéte:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-6 \tag{1}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=8 \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-a \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4=b. \tag{4}$$

Din (1) $\Longrightarrow x_4=-3$. Cum $x_4=3\alpha \Longrightarrow \alpha=-1$. Deci $x_2=-1$.

Din (2) $\Longrightarrow r=\pm 2$, deci $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=-3$. Din (3) şi (4) aflăm $a=-6$ şi $b=-9$.

Răspuns corect: (d).

22. Valorile parametrului real m pentru care matricea

$$A=\begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

este inversabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}$ sunt:

(a) $m=2$; $\quad(b)$ $m\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$; $\quad(c)$ $m\in(1,2)$; $\quad(d)$ $m\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$.

Soluţie. $\det(A)=x^2(1-m)+2x+3-2m\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă $\Delta=-2m^2+5m-2<0$, de unde $m\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$.

Răspuns corect: (b).

23. Valoarea limitei

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}{\sin x-x\cos x}$$

este:

(a) 0; $\quad(b)$ 2; $\quad(c)$ ∞; $\quad(d)$ 1.

Soluţie. Aplicând regula lui l'Hôspital pentru nedeterminarea 0/0, deducem pe rând

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{x^2+1}}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{x\left(x^2+1\right)\sin x\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{x\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}+\frac{\sin x}{x}\right)=2.$$

Răspuns corect: (b).

24. Precizaţi care dintre afirmaţiile de mai jos este adevărată pentru funcţia

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

(a) Pentru $x<e\sqrt{e}$ funcţia f este convexă şi pentru $x>e\sqrt{e}$ funcţia f este concavă;

(b) Pentru $x>e\sqrt{e}$ funcţia f este convexă şi pentru $x<e\sqrt{e}$ funcţia f este concavă;

(c) Pentru $x>e$ funcţia f este convexă şi pentru $x<e$ funcţia f este concavă;

(d) Pentru $x<e$ funcţia f este convexă şi pentru $x>e$ funcţia f este concavă.

Soluţie. Derivatele lui f sunt

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ f''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}.$$

Soluţia ecuaţiei $f''(x)=0$ este $x=e^{3/2}=e\sqrt{e}$. Pentru $x>e\sqrt{e}$, funcţia f este convexă, iar pentru $x<e\sqrt{e}$, funcţia f este concavă.

Răspuns corect: (b).

25. Valorile ale parametrului real $a > 0$ pentru care are loc inegalitatea $2^x + a^x \geq 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt:

(a) $a = 2$; (b) $a \geq 2$; (c) $a = \frac{1}{2}$; (d) $a < \frac{1}{2}$.

Soluţie. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + a^x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, $x_0 = 0$ este punct de minim pentru funcţia f, deci $f'(0) = 0$ sau $\ln a + \ln 2 = 0$. Se obţine $a = 1/2$.

Răspuns corect: (c).

26. Valoarea expresiei

$$E = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)}$$

este:

(a) $\sin a \cos b - \cos a \sin b$; (b) $\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b$; (c) $\operatorname{tg} 2b$; (d) $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} b$.

Soluţie. Avem

$$E = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b - \sin a \cos b + \cos a \sin b}{\sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b} =$$

$$= \frac{2 \cos a \sin b}{2 \sin a \cos b} = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b.$$

Răspuns corect: (b).

27. Cea mai mică valoare reală a expresiei $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$, pentru $x, y \in \mathbb{R}$, este:

(a) 5; (b) 4; (c) 0; (d) 3.

Soluţie. Expresia reprezintă distanţa de la punctul $M(x,y)$ la punctele $A(4,0)$ şi $B(0,3)$. Dar $\|AM\| + \|BM\| \geq \|AB\|$, $\|AB\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Răspuns corect (a).

28. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei:

$$z^2 = 3 + 4i$$

este:

(a) $\{2 - i, 2 + i\}$; (b) $\{2 + i, -2 - i\}$; (c) $\{2 + i, -2 + i\}$; (d) $\{2 - i, -2 - i\}$.

Soluţie. $(a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$ $[a = -2, b = -1], [a = 2, b = 1]$
Răspuns corect (b).

29. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(3\arccos x) = \cos(2\arccos x) + 1\}$. Atunci
(a) $A = \mathbb{R}$; (b) $A = \emptyset$; (c) $A = \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{13}, 0, 1\right\}$;
(d) $A = \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{13}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{13} + \frac{1}{4}\right\}$.

Soluţie. $\cos(3\arccos x) = 4\cos^3(\arccos x) - 3\cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x$
$4x^3 - 3x = 2x^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\sqrt{13} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{13}, 0$
Răspuns corect (d).

30. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere raţionale ce verifică relaţia

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ atunci:
(a) $l = 2$; (b) $l = 0$; (c) $l = 1$; (d) $l = \sqrt{2}$.

Soluţie. Utilizând dezvoltarea binomului lui Newton se observă că:
$\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(1 - \sqrt{2}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Atunci $x_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$ şi $y_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{\sqrt{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]}{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}$.
Cum $\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{2} \cdot \frac{1+0}{1-0} = \sqrt{2}$.
Răspuns corect: (d).