Model 2 test admitere Automatică şi Calculatoare

1. Valorile parametrului real a pentru care rădăcinile ecuaţiei $x^2+2ax+1=0$ verifică egalitatea $x_1^2+x_2^2=1$ sunt:
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ şi $-\frac{3}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ şi $-\frac{3}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ şi $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. Considerăm familia de funcţii de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_m(x) = (m^2+1)x^2 + 2mx + 1.$$

Notăm cu $V_m(x_m, y_m)$ vârfurile parabolelor asociate. Atunci:
(a) Valoarea minimă a lui x_m este $-\frac{1}{2}$ şi se obţine pentru $m=1$.
(b) Valoarea minimă a lui y_m este 0 şi se obţine pentru $m=1$.
(c) Valoarea maximă a lui x_m este $-\frac{1}{2}$ şi se obţine pentru $m=0$.
(d) Valoarea maximă a lui y_m este 0 şi se obţine pentru $m=1$.

3. Mulţimea de definiţie a funcţiei $f(x) = \arcsin\sqrt{1+x} + \ln(1+2x)$ este:
(a) $(-1,0]$ (b) $[0,1]$ (c) $\left(-\frac{1}{2},0\right]$ (d) $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

4. Numerele strict pozitive $x<y<z$ sunt astfel încât e^x, e^y şi e^z sunt în progresie geometrică. Atunci, valoarea raportului $\frac{y-x}{z-x}$ este:
$a)$ 2 $b)$ -2 $c)$ $\frac{1}{2}$ $d)$ $-\frac{1}{2}$.

5. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+m, & x \le 1 \\ 2mx-1, & x>1 \end{cases}$$

este surjectivă pe $\mathbb{R}$ este:
(a) $(-2,0)$; (b) $(0,2]$; (c) $(0,+\infty)$; (d) $(-\infty,0)$.

6. Fie ecuaţia $(e^{2x}-2e^x)^2 - 2(e^{2x}-2e^x) - 3 = 0$. Atunci:
(a) Ecuaţia are 4 soluţii reale, distincte.
(b) Ecuaţia are exact o soluţie raţională dublă.

(c) Ecuaţia are exact două rădăcini raţionale diferite.
(d) Toate rădăcinile ecuaţiei sunt numere iraţionale.

7. Sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2^{x^2} \cdot 3^{y^2+1} = 24 \\ 2^{y^2+2} \cdot 3^{x^2} = 108 \end{cases}$$

are:
(a) o soluţie (b) 2 soluţii (c) 3 soluţii (d) nici o soluţie .

8. Se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 + 2p^2X + 3p^3$, $p \neq 0$. Atunci, raportul dintre pătratul sumei cuburilor rădăcinilor lui f şi cubul sumei pătratelor rădăcinilor lui f este egal cu:
(a) $-\dfrac{16}{27}$ (b) -16 (c) -27 (d) $-\dfrac{27}{16}$.

9. Suma rădăcinilor polinomului

$$f = \frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!} + \frac{X(X+1)...(X+n-2)}{(n-1)!} + ... + \frac{X(X+1)}{2!} + \frac{X}{1!} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

este:
(a) 0; (b) $-n^2$; (c) $-(n+1)^2$; (d) $-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

10. Cel mai mare termen din dezvoltarea $\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right)^{100}$ este:

(a) 1 (b) T_{67} (c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$ (d) T_{34}.

11. Fie ω o rădăcină a ecuaţiei $x^2+x+1 = 0$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci, valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \omega^n & 1 & 1 \\ 1 & \omega^n & 1 \\ 1 & 1 & \omega^n \end{vmatrix}$$

(a) nu depinde de n.
(b) este constantă pentru n multiplu de 3.
(c) este constantă pentru orice n multiplu al lui 4.
(d) este constantă pentru orice n par.

12. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & m \\ 0 & m & m \end{pmatrix}.$$

Atunci:

(a) Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât A este inversabilă, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(b) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât A este inversabilă.
(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rang $A = 2$.
(d) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rang $A = 2$.

13. Fie x_1, x_2, x_3 soluţiile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1 x + x_2 y + x_3 z = 1 \\ x_2 x + x_3 y + x_1 z = p \\ x_3 x + x_1 y + x_2 z = q. \end{cases}$$

Atunci:

(a) Sistemul este incompatibil.
(b) Sistemul este compatibil unic determinat.
(c) Sistemul este compatibil $1-$nedeterminat.
(d) Sistemul este compatibil $2-$nedeterminat.

14. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie bijectivă astfel încât $f^{-1}(1) = 2$. Definim o lege de compoziţie $*$ pe $\mathbb{R}$ astfel

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a * b = f\left[f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - 2\right].$$

Elementul neutru al acestei legi este:
(a) 2; (b) 0; (c) 1; (d) nu admite element neutru.

15. Fie suma

$$S_n = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^{n-1}.$$

Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{3^n}$ este:
(a) 1; (b) 0; (c) ∞; (d) 2.

16. Valoarea limitei:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

este:

(a) 0; (b) 1; (c) $\dfrac{1}{2}$; (d) ∞.

17. Fie şirul dat prin $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = \sin x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Atunci:

(a) (x_n) este nemărginit;

(b) (x_n) este crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

18. Fie

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}.$$

Atunci:

(a) $\ell = 0$; (b) $\ell = \frac{1}{8}$; (c) $\ell = \frac{1}{2}$; (d) limita nu există.

19. Fie funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{x^2}{e^{1-x}}.$$

Valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f^{(n)}(1) = 7$ este:

(a) $n = 0$; (b) $n = 1$; (c) $n = 2$; (d) $n = 3$.

20. Fie funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{1}{1 + |x-1|}.$$

Atunci o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei f este:

(a) $F(x) = \begin{cases} 2016 - \ln(2-x), & x \le 1 \\ \ln x + 2016, & x > 1 \end{cases}$; (b) $F(x) = \begin{cases} 2 - \ln(2-x), & x \le 1 \\ \ln x + e, & x > 1 \end{cases}$;

(c) $F(x) = 2000 + \ln|x|$; (d) $F(x) = \begin{cases} 2016 + \ln(2-x), & x < 1 \\ 2016 & x = 1 \\ \ln x + 2016, & x > 1 \end{cases}$.

21. Valoarea integralei

$$I = \int_1^{\ln^2 3} \frac{1}{\sqrt{x} \cdot e^{2\sqrt{x}}} dx$$

este:

(a) $\dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{9}$; (b) $\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{3}$; (c) 1; (d) 0.

22. Aria domeniului plan cuprins între parabolele de ecuaţii $y^2 = x$ şi $x^2 = y$ este:
(a) 2; (b) 0; (c) 1; (d) $\dfrac{1}{3}$.

23. Derivata funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2} dt$$

este:

(a) $f'(x) = e^{\cos^2 x} - e^{\sin^2 x}$; (b) $f'(x) = \cos x \cdot e^{\cos^2 x} - \sin x \cdot e^{\sin^2 x}$;
(c) $f'(x) = 2\cos x \cdot \sin x \cdot (e^{\cos^2 x} + e^{\sin^2 x})$; (d) $f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos^2 x} - \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$.

24. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, notăm $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2016} \cdot e^{-n^2 x^2} dx$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2016} \cdot I_n$ are valoarea:

(a) 2016; (b) $\dfrac{1}{2016}$; (c) 0; (d) ∞.

25. Unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{a} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = 8\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$ este:
(a) 0; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{\pi}{4}$; (d) $\frac{\pi}{3}$.

26. O latură a unui triunghi este situată pe axa Ox, iar celelalte două pe dreptele de ecuaţii $2x - 3y + 6 = 0$ respectiv $3x + 2y - 6 = 0$. Coordonatele ortocentrului sunt:
(a) $(\frac{6}{13}, \frac{27}{13})$; (b) $(\frac{1}{2}, 2)$; (c) $(\frac{6}{13}, \frac{30}{13})$; (d) $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$.

27. Notăm cu S suma valorilor parametrului real m pentru care vârfurile parabolelor $y = x^2 - 2mx + 1$ se află pe cercul cu centrul în origine şi având raza egală cu 1. Atunci valoarea lui S este:
(a) 0; (b) 1; (c) -1; (d) 3.

28. Produsul

$$(\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{ctg} 1^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{ctg} 2^\circ) \cdot \ldots \cdot (\operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{ctg} 89^\circ)$$

are valoarea:

(a) 0; (b) $\frac{1}{2^{89}}$; (c) $\frac{-1}{2^{89}}$; (d) 1.

29. Fie numerele complexe z de modul 1 ce satisfac relaţia:

$$\sin\left(z+\overline{z}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\left(z-\overline{z}\right)\right)=0.$$

Atunci $\mathrm{Re}^4 z+\mathrm{Im}^4 z$ este un element al mulţimii:
(a) $\mathbb{N}$; (b) $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; (c) $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$; (d) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

30. Soluţiilor sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases}\cos x\cos y=\frac{3}{4}\\ \sin x\sin y=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

sunt:
(a) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+m\pi, y=\mp\dfrac{\pi}{6}+n\pi;$
(b) ; $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+m\pi, y=\pm\dfrac{\pi}{3}+n\pi$
(c) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2m\pi, y=\mp\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3};$
(d) $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{m\pi}{6}, y=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{n\pi}{6}$, $m,n\in\mathbb{Z}, m$ şi n au aceeaşi paritate.