Model 2 test admitere Automatică şi Calculatoare

1. Valorile parametrului real a pentru care rădăcinile ecuaţiei $x^2+2ax+1=0$ verifică egalitatea $x_1^2+x_2^2=1$ sunt:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ şi $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ (b) $\dfrac{3}{2}$ şi $-\dfrac{3}{2}$ $\quad$ (c) $\dfrac{3}{4}$ şi $-\dfrac{3}{4}$ $\quad$ (d) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ şi $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Soluţie. $x_1^2+x_2^2=s^2-2p=(-2a)^2-2\cdot 1$. Obţinem $4a^2=3$ deci $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: (a)

2. Considerăm familia de funcţii de gradul al doilea $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=(m^2+1)x^2+2mx+1$. Notăm cu $V_m(x_m,y_m)$ vârfurile parabolelor asociate. Atunci:

(a) Valoarea minimă a lui x_m este $-\dfrac{1}{2}$ şi se obţine pentru $m=1$.

(b) Valoarea minimă a lui y_m este 0 şi se obţine pentru $m=1$.

(c) Valoarea maximă a lui x_m este $-\dfrac{1}{2}$ şi se obţine pentru $m=0$.

(d) Valoarea maximă a lui y_m este 0 şi se obţine pentru $m=1$.

Soluţie. Pentru fiecare $m\in\mathbb{R}$ avem

$$x_m=-\frac{b}{2a}=-\frac{m}{m^2+1}$$
$$y_m=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{m^2+1}.$$

Se observă imediat că valoarea minimă a lui y_m este 0, atingându-se pentru $m\to\pm\infty$ iar valoarea maximă este 1 şi se atinge pentru $m=0$. Deci, $b)$ şi $d)$ sunt false. Pe de altă parte, folosind inegalitatea mediilor, avem $m^2+1\geq 2m$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$ iar egalitatea se obţine pentru $m=0$. De aici rezultă că

$$x_m=-\frac{m}{m^2+1}\geq-\frac{1}{2},$$

cu egalitate pentru $m=1$.

Răspuns corect: (a).

3. Mulţimea de definiţie a funcţiei $f(x)=\arcsin\sqrt{1+x}+\ln(1+2x)$ este:

(a) $(-1,0]$ $\quad$ (b) $[0,1]$ $\quad$ (c) $\left(-\dfrac{1}{2},0\right]$ $\quad$ (d) $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$.

Soluţie. Condiţiile de existenţă sunt: $1+x \geq 0$, $\sqrt{1+x} \in [-1,1]$, respectiv $1+2x > 0$ Se obţine imediat $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Răspuns corect: (c).

4. Numerele strict pozitive $x < y < z$ sunt astfel încât e^x, e^y şi e^z sunt în progresie geometrică. Atunci, valoarea raportului $\dfrac{y-x}{z-x}$ este:

$a)$ 2 $\quad$ $b)$ -2 $\quad$ $c)$ $\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $d)$ $-\dfrac{1}{2}$.

Soluţie. Numerele e^x, e^y şi e^z sunt în progresie geometrică implică faptul că $e^{2y} = e^x \cdot e^z$, de unde $y = \dfrac{x+z}{2}$. Rezultă că

$$y - x = \frac{x+z}{2} - x = \frac{z-x}{2}.$$

Răspuns corect: (c).

5. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+m, & x \leq 1 \\ 2mx - 1, & x > 1 \end{cases}$$

este surjectivă pe $\mathbb{R}$ este:

(a) $(-2,0)$; $\quad$ (b) $(0,2]$; $\quad$ (c) $(0,+\infty)$; $\quad$ (d) $(-\infty,0)$.

Soluţie. Se utilizează graficul funcţiei f. Acesta se compune din două semidrepte de ecuaţie $y = x + m$ pentru $x \leq 1$ şi $y = 2mx - 1$ pentru $x > 1$. Se impune $m > 0$, altfel mulţimea valorilor lui f nu ar acoperi $\mathbb{R}$. Dacă $2m - 1 > 1 + m$, f ar avea un salt în punctul $x = 1$ şi f nu ar lua valorile cuprinse între $m+1$ şi $2m-1$. Se impune $2m - 1 \leq 1 + m \Leftrightarrow m \leq 2$. Deci, dacă $0 < m \leq 2$, atunci funcţia f este surjectivă.

Răspuns corect: (b).

6. Fie ecuaţia $(e^{2x} - 2e^x)^2 - 2(e^{2x} - 2e^x) - 3 = 0$. Atunci:

(a) Ecuaţia are 4 soluţii reale, distincte.

(b) Ecuaţia are exact o soluţie raţională dublă.

(c) Ecuaţia are exact două rădăcini raţionale diferite.

(d) Toate rădăcinile ecuaţiei sunt numere iraţionale.

Soluţie. Dacă notăm $e^{2x} - 2e^x = t$ ecuaţia devine $t^2 - 2t - 3 = 0$ sau, echivalent, $(t+1)(t-3) = 0$. Astfel, fie $e^{2x} - 2e^x = -1$, fie $e^{2x} - 2e^x = 3$. Rezolvând cele 2 ecuaţii se obţine imediat $e^x \in \{1, 3\}$. Evident, nu putem avea decât $x = 0$ sau $x = \ln 3$.

Răspuns corect: (b).

7. Sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2^{x^2} \cdot 3^{y^2+1} = 24 \\ 2^{y^2+2} \cdot 3^{x^2} = 108 \end{cases}$$

are:

(a) o soluţie (b) 2 soluţii (c) 3 soluţii (d) nici o soluţie .

Soluţie. Sistemul poate fi rescris în forma:

$$\begin{cases} 2^{x^2} \cdot 3^{y^2} = 8 \\ 2^{y^2} \cdot 3^{x^2} = 27 \end{cases}.$$

Făcând raportul celor două ecuaţii se obţine

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{y^2} = \frac{2^3}{3^3},$$

de unde, $x^2 - y^2 = 3$. Înlocuind în prima ecuaţie a sistemului, obţinem

$$2^{y^2} \cdot 3^{y^2} = 1,$$

şi, deci, $y = 0$ şi $x = \pm\sqrt{3}$.

Răspuns corect: (b).

8. Se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 + 2p^2X + 3p^3$, $p \neq 0$. Atunci, raportul dintre pătratul sumei cuburilor rădăcinilor lui f şi cubul sumei pătratelor rădăcinilor lui f este egal cu:

(a) $-\dfrac{16}{27}$ (b) -16 (c) -27 (d) $-\dfrac{27}{16}$.

Soluţie. Se obţine $-\dfrac{16}{27}$ aplicând relaţiile lui Viete şi faptul că dacă x_i este rădăcină pentru f, atunci $x_i^3 = -px_i^2 - 2p^2x_i - 3p^3$.

Răspuns corect: (a).

9. Suma rădăcinilor polinomului

$$f = \frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!} + \frac{X(X+1)...(X+n-2)}{(n-1)!} + ... + \frac{X(X+1)}{2!} + \frac{X}{1!} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

este:

(a) 0; (b) $-n^2$; (c) $-(n+1)^2$; (d) $-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Soluţie. Polinomul poate fi pus în forma

$$f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0.$$

În această scriere, suma rădăcinilor lui f este egală cu $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. În mod evident, $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Pentru a afla a_{n-1}, observăm că singurii termeni care conţin X^{n-1} sunt primii doi termeni. În cel de-al doilea termen, coeficientul lui X^{n-1} este egal cu $\dfrac{1}{(n-1)!}$. Notând cu $g = X(X+1)...(X+n-1)$, observăm că termenul care conţine X^{n-1} are drept coeficient opusul sumei rădăcinilor lui g, adică $1+2+...+(n-1) = \dfrac{1}{2}n(n-1)$. Astfel, $a_{n-1} = \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{n(n-1)}{2n!} = \dfrac{n+1}{2(n-1)!}$ şi, în fine, suma rădăcinilor lui f este

$$s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Răspuns corect: (d).

10. Cel mai mare termen din dezvoltarea $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ este:

(a) 1 (b) T_{67} (c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$ (d) T_{34}.

Soluţie. Termenul general este

$$T_{k+1} = C_{100}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{100} C_{100}^{k}\frac{1}{2^k}.$$

Atunci, $\dfrac{T_{k+1}}{T_{k+2}} \geq 1$ pentru $k \geq 33$ şi $\dfrac{T_k}{T_{k+1}} < 1$ pentru $k < 33$ deci cel mai mare termen se obţine pentru $k = 33$, deci $T_{34.}$

Răspuns corect: (d).

11. Fie ω o rădăcină a ecuaţiei $x^2+x+1=0$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci, valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \omega^n & 1 & 1 \\ 1 & \omega^n & 1 \\ 1 & 1 & \omega^n \end{vmatrix}$$

(a) nu depinde de n.
(b) este constantă pentru n multiplu de 3.
(c) este constantă pentru orice n multiplu al lui 4.
(d) este constantă pentru orice n par.

Soluţie. Deoarece $\omega^2+\omega+1=0$ şi, evident, $\omega \neq 1$, rezultă că $\omega^3=1$. Cum determinantul este egal cu $\omega^{3n}+2-3\omega^n = 3(1-\omega^n)$, răspunsul corect este (b).

12. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & m \\ 0 & m & m \end{pmatrix}.$$

Atunci:
(a) Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât A este inversabilă, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(b) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât A este inversabilă.
(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rang $A = 2$.
(d) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rang $A = 2$.

Soluţie. Răspunsul corect este, evident, (c).

13. Fie x_1, x_2, x_3 soluţiile ecuaţiei $x^3+px+q=0$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1x + x_2y + x_3z = 1 \\ x_2x + x_3y + x_1z = p \\ x_3x + x_1y + x_2z = q. \end{cases}$$

Atunci:
(a) Sistemul este incompatibil.
(b) Sistemul este compatibil unic determinat.
(c) Sistemul este compatibil $1-$nedeterminat.
(d) Sistemul este compatibil $2-$nedeterminat.

Soluţie. Determinantul matricei sistemului este

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3+x_2^3+x_3^3).$$

Folosind relaţiile lui Viete rezultă $x_1x_2x_3=-q$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -p(x_1+x_2+x_3)-3q = -3q$. Astfel, $\det A = 0$. Sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse. Dar,

$$\begin{aligned}
d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_3 & p \\ x_3 & x_1 & q \end{vmatrix} &= qx_1x_3 + x_1x_2 + px_2x_3 - \left(x_3^2 + qx_2^2 + px_1^2\right) \\
&= x_1x_2 - x_3^2 + q(x_1x_3 - x_2^2) + p(x_2x_3 - x_1^2) \\
&= -\frac{q}{x_3} - x_3^2 + q(-\frac{q}{x_2} - x_2^2) + p(-\frac{q}{x_1} - x_1^2) \\
&= -\frac{1}{x_3}(x_3^3 + q) - \frac{q}{x_1}(x_2^3 + q) - \frac{p}{x_1}(x_2^3 + q) \\
&= -\frac{1}{x_3} \cdot (-px_3) - \frac{q}{x_2} \cdot (-px_2) - \frac{p}{x_1} \cdot (-px_1) \\
&= p(p + q + 1) \neq 0.
\end{aligned}$$

Deci, rangul matricei extinse este diferit de rangul matricei sistemului

Răspuns corect : (a).

14. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie bijectivă astfel încât $f^{-1}(1) = 2$. Definim o lege de compoziţie $*$ pe $\mathbb{R}$ astfel

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a * b = f\left[f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - 2\right].$$

Elementul neutru al acestei legi este:

(a) 2; (b) 0; (c) 1; (d) nu admite element neutru.

Soluţie. Fie e elementul neutru a acestei legi. Se obţine

$a * e = f\left[f^{-1}(a) + f^{-1}(e) - 2\right] = a,$

$e * a = f\left[f^{-1}(e) + f^{-1}(a) - 2\right] = a.$

Rezultă $f^{-1}(a) + f^{-1}(e) - 2 = f^{-1}(e) + f^{-1}(a) - 2 = f^{-1}(a) \Rightarrow f^{-1}(e) = 2$, f^{-1} bijectivă$\Rightarrow e = 1$.

Răspuns corect: (c).

15. Fie suma

$$S_n = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^{n-1}.$$

Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{3^n}$ este:

(a) 1; (b) 0; (c) ∞; (d) 2.

Soluţie. Cum $S_n = 2^n - 2$, rezultă că limita căutată este 0. Răspuns corect: (b).

16. Valoarea limitei:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

este:

(a) 0; (b) 1; (c) $\frac{1}{2}$; (d) ∞.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2\cdot 4}{3^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: (c).

17. Fie şirul dat prin $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = \sin x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Atunci:

(a) (x_n) este nemărginit;

(b) (x_n) este crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Folosind inegalitatea

$$\sin x \le x, \quad x \in \mathbb{R},$$

rezultă că $x_{n+1} \le x_n$ pentru orice n, deci şirul (x_n) este descrescător. Cum toţi termenii sunt pozitivi, rezultă (x_n) este mărginit inferior, deci convergent. Fie ℓ limita sa. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, rezultă

$$\ell = \sin \ell.$$

Acest lucru este posibil doar dacă $\ell = 0$, deoarece funcţia $x - \sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2})$.

Răspuns corect: (d).

Observaţie: Răspunsul poate fi găsit uşor prin excluziune.

18. Fie

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}.$$

Atunci:

(a) $\ell = 0$; (b) $\ell = \frac{1}{8}$; (c) $\ell = \frac{1}{2}$; (d) limita nu există.

Soluţie. Avem

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}\left(e^{\sin x - \operatorname{tg} x} - 1\right)}{e^{\operatorname{tg} 2x}\left(e^{\sin 2x - 2\operatorname{tg} x} - 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{e^{\sin x - \operatorname{tg} x} - 1}{\sin x - \operatorname{tg} x}}{e^{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{e^{\sin 2x - 2\operatorname{tg} x} - 1}{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}} \cdot \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}.$$

Aplicând regula lui L'Hôpital pentru ultima limită, rezultă

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{2\cos 2x - \frac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^3 2x - 1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}{3\cos^2 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: (b).

19. Fie funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{e^{1-x}}.$$

Valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f^{(n)}(1) = 7$ este:

(a) $n = 0$; (b) $n = 1$; (c) $n = 2$; (d) $n = 3$.

Soluţie. Folosind formula lui Leibniz de derivare a produsului, rezultă

$$f^{(n)}(x) = \left(x^2 \cdot e^{x-1}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (x^2)^{(k)} \cdot \left(e^{x-1}\right)^{(n-k)}.$$

Cum $(e^{x-1})^{(p)} = e^{x-1}$ pentru orice p, rezultă de mai sus că

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= x^2 e^{x-1} + n \cdot 2x \cdot e^{x-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot e^{x-1} \\ &= e^{x-1} \cdot \left(x^2 + 2nx + n^2 - n\right),\end{aligned}$$

de unde

$$f^{(n)}(1) = n^2 + n + 1.$$

Egalând expresia cu 7, rezultă $n = 2$.

Răspuns corect: (b).

20. Fie funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{1+|x-1|}.$$

Atunci o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei f este:

(a) $F(x)=\begin{cases} 2016-\ln(2-x), & x\le 1\\ \ln x+2016, & x>1\end{cases}$; (b) $F(x)=\begin{cases} 2-\ln(2-x), & x\le 1\\ \ln x+e, & x>1\end{cases}$;

(c) $F(x)=2000+\ln|x|$; (d) $F(x)=\begin{cases} 2016+\ln(2-x), & x<1\\ 2016 & x=1\\ \ln x+2016, & x>1\end{cases}$.

Soluţie. Se observă că

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-x}, & x\le 1\\ \frac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$$

Cum o primitivă a lui f trebuie să fie o funcţie derivabilă, deci şi continuă, rezultă răspunsul corect (a).

21. Valoarea integralei

$$I=\int_1^{\ln^2 3}\frac{1}{\sqrt{x}\cdot e^{2\sqrt{x}}}dx$$

este:

(a) $\frac{1}{e^2}-\frac{1}{9}$; (b) $\frac{1}{e}-\frac{1}{3}$; (c) 1; (d) 0.

Soluţie. Se face schimbarea de variabilă $2\sqrt{x}=t$. Atunci $dt=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$, de unde

$$I=\int_2^{2\ln 3}e^{-t}\,dt=-e^{-t}\Big|_2^{2\ln 3}=-e^{-2\ln 3}+e^{-2}=\frac{1}{e^2}-\frac{1}{9}.$$

Răspuns corect: (a).

22. Aria domeniului plan cuprins între parabolele de ecuaţii $y^2=x$ şi $x^2=y$ este:

(a) 2; (b) 0; (c) 1; (d) $\frac{1}{3}$.

Soluţie. Se observă că abscisa punctului de intersecţie a celor două parabole este $x=1$. Cum $\sqrt{x}\ge x^2$ pe intervalul $[0,1]$, rezultă

$$\text{Aria}=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Răspuns corect: (d).

23. Derivata funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2} dt$$

este:

(a) $f'(x) = e^{\cos^2 x} - e^{\sin^2 x}$; (b) $f'(x) = \cos x \cdot e^{\cos^2 x} - \sin x \cdot e^{\sin^2 x}$;
(c) $f'(x) = 2\cos x \cdot \sin x \cdot (e^{\cos^2 x} + e^{\sin^2 x})$; (d) $f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos^2 x} - \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$.

Soluţie. Se observă că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcţia $t \mapsto e^{t^2}$ este continuă pe intervalul de integrare, deci admite primitive. Fie H o primitivă a funcţiei $t \mapsto e^{t^2}$. Rezultă $H'(t) = e^{t^2}$ pentru orice t. Atunci $f(x) = H(\cos x) - H(\sin x)$. Rezultă

$$\begin{aligned} f'(x) &= H'(\cos x) \cdot (\cos x)' - H'(\sin x) \cdot (\sin x)' \\ &= -\sin x \cdot e^{\cos^2 x} - \cos x \cdot e^{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Răspuns corect (d).

24. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, notăm $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2016} \cdot e^{-n^2 x^2} dx$. Atunci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{2016} \cdot I_n$ are valoarea:

(a) 2016; (b) $\dfrac{1}{2016}$; (c) 0; (d) ∞.

Soluţie. Avem

$$n^{2016} \cdot I_n = \int_0^1 (nx)^{2016} \cdot e^{-(nx)^2} dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $nx = y$, obţinem

$$n^{2016} \cdot I_n = \frac{\displaystyle\int_0^n y^{2016} \cdot e^{-y^2} dy}{n}.$$

Cum funcţia

$$F(t) = \int_0^t y^{2016} \cdot e^{-y^2} dy$$

este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$F'(t) = t^{2016} \cdot e^{-t^2},$$

rezultă aplicând regula lui L'Hôpital mai sus că

$$\lim_{n\to\infty} n^{2016} \cdot I_n = \lim_{n\to\infty} n^{2016} \cdot e^{-n^2} = 0.$$

Răspuns corect: (c).

25. Unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{a} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = 8\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$ este:

(a) 0; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{\pi}{4}$; (d) $\frac{\pi}{3}$.

Soluţie. Cum produsul scalar este egal cu 0, rezultă că vectorii sunt perpendiculari.

Răspuns corect: (b).

26. O latură a unui triunghi este situată pe axa Ox, iar celelalte două pe dreptele de ecuaţii $2x - 3y + 6 = 0$ respectiv $3x + 2y - 6 = 0$. Coordonatele ortocentrului sunt:

(a) $(\frac{6}{13}, \frac{27}{13})$; (b) $(\frac{1}{2}, 2)$; (c) $(\frac{6}{13}, \frac{30}{13})$; (d) $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$.

Soluţie. Se observă că dreptele sunt perpendiculare, deoarece au vectorii directori perpendiculari. Rezultă că ortocentrul triunghiului este punctul de intersecţie al dreptelor, care are coordonatele $(\frac{6}{13}, \frac{30}{13})$.

Răspuns corect: (c).

27. Notăm cu S suma valorilor parametrului real m pentru care vârfurile parabolelor $y = x^2 - 2mx + 1$ se află pe cercul cu centrul în origine şi având raza egală cu 1. Atunci valoarea lui S este:

(a) 0; (b) 1; (c) -1; (d) 3.

Soluţie. Se observă că vârfurile parabolelor au coordonatele $(m, 1 - m^2)$. Cercul cu centrul în origine şi având raza egală cu 1 are ecuaţia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Înlocuind cele două coordonate în ecuaţia de mai sus, rezultă $m \in \{-1, 0, 1\}$.

Răspuns corect: (a).

28. Produsul

$$(\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{ctg} 1^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{ctg} 2^\circ) \cdot ... \cdot (\operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{ctg} 89^\circ)$$

are valoarea:

(a) 0; (b) $\frac{1}{2^{89}}$; (c) $\frac{-1}{2^{89}}$; (d) 1.

Soluţie. Se observă că $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$, de unde deducem că valoarea producului este 0. Răspuns corect: (a).

29. Fie numerele complexe z de modul 1 ce satisfac relaţia:

$$\sin(z + \overline{z}) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + i(z - \overline{z})\right) = 0.$$

Atunci $\mathrm{Re}^4 z + \mathrm{Im}^4 z$ este un element al mulţimii:

(a) $\mathbb{N}$; (b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; (c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; (d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soluţie. Considerăm $z = a + ib$. Relaţia din enunţ devine

$$\sin 2a = \sin 2b.$$

Cum $a^2 + b^2 = 1$, rezultă $a = b$. Deducem $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$. Atunci $\mathrm{Re}^4 z + \mathrm{Im}^4 z = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect: (c).

30. Soluţiilor sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{3}{4} \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

sunt:

(a) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + m\pi, y = \mp\dfrac{\pi}{6} + n\pi$;

(b) ; $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + m\pi, y = \pm\dfrac{\pi}{3} + n\pi$

(c) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2m\pi, y = \mp\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$;

(d) $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{m\pi}{6}, y = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n\pi}{6}$, $m, n \in \mathbb{Z}, m$ şi n au aceeaşi paritate.

Soluţie. Adunăm şi scădem ecuaţiile sistemului şi obţinem:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x + y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 2h\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Răspuns corect: (a) .