MODEL TEST 5

1. Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei
$\dfrac{23A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^4} = 24$ este:
(a) $\{1,5\}$; **(b)** $\emptyset$; **(c)** $\{5\}$; **(d)** $\{5,6\}$.

2. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x \le 0 \\ -x^2 + 2000x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$:
(a) nu este monotonă pe $\mathbb{R}$; **(b)** este descrescătoare pe $\mathbb{R}$; **(c)** este injectivă pe $\mathbb{R}$; **(d)** nu este surjectivă.

3. Fie $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, unde
$a_n = -\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7^2} - \dfrac{1}{7^3} + ... + \dfrac{(-1)^n}{7^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi
$b_n = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + ... + \dfrac{n}{(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Atunci $l_1 + l_2$ este:
(a) $\frac{15}{8}$; **(b)** 1; **(c)** $\frac{7}{8}$; **(d)** $\frac{1}{8}$.

4. Câte numere întregi mai mari decât numărul real $-2,016$ sunt în mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2,016| \le 3 - x\}$?
(a) 5; **(b)** 2; **(c)** 3; **(d)** nici unul.

5. Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 20x + 16 = 0$. Valoarea expresiei $E = (x_1)^3 x_2 + x_1 (x_2)^3$ este:
(a) $E = 368$; **(b)** $E = 5888$; **(c)** $E = 6400$; **(d)** $E = -6400$.

6. Fie punctele din plan $A(1,2)$ şi $B(3,4)$. Fie C simetricul lui A faţă de B. Ecuaţia dreptei ce trece prin C şi este perpendiculară pe AB este:
(a) $(d) : -x + y - 1 = 0$;
(b) $(d) : x + y + 1 = 0$;
(c) $(d) : 2x + y - 6 = 0$;
(d) $(d) : x + y - 11 = 0$.

7. Fie $p = i \cdot i^2 \cdot ... \cdot i^{100}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia
$f : [0,2000] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a \cdot p \cdot \cos(x-1), & \text{dacă } x \in [0,1] \\ \dfrac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x^2 - 3x + 2} & \text{dacă } x \in (1,2000] \end{cases}$
să fie continuă pe $[0,2000]$.
(a) $a = \dfrac{-1}{3}$; **(b)** $a = \dfrac{1}{3}$; **(c)** $a = 0$; **(d)** nu există a cu proprietatea cerută.

8. Fie parametrul $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia

$mx^2 + (m+1)\,x + m - 1 = 0.$
Atunci condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia anterioară să nu admită rădăcini reale este:
(a) $m \in \left(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\right)$; **(b)** $m \in \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; **(c)** $m \in \left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$; **(d)** $m \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

9. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x.$
(a) -2 şi 2; **(b)** $0, -\sqrt{12}$ şi $\sqrt{12}$; **(c)** 16 şi -16; **(d)** f nu are puncte de extrem local.

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Partea reală a numărului complex
$z = \left(\operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\right)^n$
este egală cu:
(a) 1; **(b)** -1; **(c)** 0; **(d)** 2.

11. Mulţimea M a soluţiilor ecuaţiei $\log_{x+4}\left(x^2 - 1\right) = \log_{x+4}(6 - 2x)$ este:
(a) $M = \{1\}$; **(b)** $M = \{-3, 1\}$; **(c)** $M = (-3, -1)$; **(d)** $M = \emptyset$.

12. Se dă funcţia
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} \ln\left(1 + \sin^2 t\right) dt.$
Atunci $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{f'(x)}{x^2}$ este:
(a) 0; **(b)** 1; **(c)** ∞; **(d)** nu există.

13. Un polinom de grad minim, având coeficienţi raţionali, care admite ca rădăcini numerele $x_1 = \dfrac{4}{1 - \sqrt{5}}$ şi $x_2 = \dfrac{5}{1 - 2i}$ este:
(a) $P(X) = X^2 - 2X - 7$; **(b)** $P(X) = X^4 - X^2 - 34X - 70$; **(c)** $P(X) = X^2 - 2X + 10$; **(d)** .$P(X) = X^4 - X^2 + 34X - 70$.

14. Fie
$(d_1) : 2x + ay - 7 = 0$
acea dreaptă în plan pentru care $a \in \mathbb{R}$ se determină din condiţia ca punctul $A(2, 1)$ să aparţină dreptei.
Fie (d_2) acea dreaptă în plan care trece prin punctele $B(0, 4)$ şi $C(6, 0)$.
Atunci:
(a) dreptele (d_1) şi (d_2) sunt perpendiculare;
(b) dreptele (d_1) şi (d_2) se intersectează în $M\left(1, \frac{7}{3}\right)$;
(c) dreptele (d_1) şi (d_2) coincid;
(d) dreptele (d_1) şi (d_2) sunt paralele.

15. Să se determine al zecelea termen al unei progresii aritmetice descrescătoare, ştiind că raţia r a progresiei satisface

$\sqrt[3]{25^{r^2-r-\frac{3}{2}}} = 125$
şi că primul termen este $h+9$, unde h este numărul termenilor independenţi de x din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}$.

(a) 36; **(b)** -9; **(c)** -11; **(d)** 39.

16. Fie $l_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ şi $l_2 = \lim_{n\to\infty} y_n$, unde

$x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi

$y_n = \left(1 + \frac{C_n^{2016}}{C_n^{2016} + C_n^{2017}}\right)^{\frac{n}{2017}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $l_1 \cdot l_2$ este:

(a) 0; **(b)** $l = \infty$; **(c)** $\frac{e}{4}$; **(d)** e.

17. Din 7 studenţi de anul I şi 4 studenţi de anul al II-lea se aleg 5 persoane pentru a forma o echipă de lot pentru Olimpiada Ariel. În câte moduri se poate alcătui această echipă, ştiind că în componenţa ei trebuie să fie cel puţin 2 studenţi de anul al II-lea?

(a) 30; **(b)** 301; **(c)** 210; **(d)** 91.

18. Se consideră matricele

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Atunci valoarea pentru $\det\left(A^2+B^2\right)$ este:

(a) 4; **(b)** 5; **(c)** 17; **(d)** 1.

19. Fie parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$ să fie perpendiculari. Atunci

$E = m + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$

este:

(a) $\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$; **(b)** $\frac{-\sqrt{2}}{4}$; **(c)** 0; **(d)** $\frac{1-2\sqrt{2}}{4}$.

20. Fie

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ şi $B = A^2 - 8A + 13I_2$. Fie c suma elementelor matricei A^3.

Atunci:

(a) $B^{2016} = I_2$ şi $c = 276$; **(b)** $\det(B-A) = -11$ şi $c = 224$; **(c)** $2016B = 0_2$ şi $c = 172$; **(d)** B nu este inversabilă şi $c = 9$.

21. Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ \quad -my + z = 0 \\ m^2x \quad + z = 0 \end{cases}$$

şi $M = \{m \in \mathbb{R}; \text{sistemul admite doar soluţia nulă}\}$. Atunci:

(a) $M = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$; **(b)** $M = \{-2, 0, 1\}$; **(c)** $M = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$; **(d)** $M = \{-2, 1\}$.

22. Aria domeniului mărginit de dreptele $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}, y = 0$ şi de graficul funcţiei

$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$

este:

(a) $A = \dfrac{2\pi}{9}\sqrt{3} - \ln\sqrt{3}$; **(b)** $A = -\dfrac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \ln 3$; **(c)** $A = \dfrac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\ln 3$; **(d)** $A = \dfrac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

23. Să se determine $\operatorname{tg} x$ ştiind că

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.$

(a) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; **(b)** $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; **(c)** $\operatorname{tg} x = 0$; **(d)** $\operatorname{tg} x = 1$.

24. Pe mulţimea $G = (-1, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie

$x * y = xy + x + y, \forall x, y \in (-1, +\infty).$

Fie e elementul neutru al legii de compoziţie anterioare şi z soluţia ecuaţiei $z * 2000 = e$. Atunci:

(a) $z = \frac{1}{2000}$; **(b)** $z = \frac{-2001}{2000}$; **(c)** $z = \frac{2001}{2000}$; **(d)** $z = \frac{-1999}{2000}$.

25. Fie

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\left(1 + x^2\right).$

Atunci

(a) funcţia derivată f' este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$; **(b)** $f'(1) = \frac{-1}{2}$; **(c)** $f''(1) = 1$; **(d)** funcţia derivată f' este monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

26. Fie $f : (0, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$. Atunci $f^{(4)}(1)$ are valoarea:

(a) $6\left(1 - \frac{1}{3^4}\right)$; **(b)** $\frac{242}{243}$; **(c)** $24\left(1 + \frac{1}{3^5}\right)$; **(d)** $4!\left(1 - \frac{1}{3^5}\right)$.

27. O primitivă pe $(0, +\infty)$ a funcţiei

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x} + \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

este:

(a) $F(x) = -xe^{x} - e^{x} + 2\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) - 1$;
(b) $F(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 2\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) + 2$;
(c) $F(x) = -xe^{-x} + e^{-x} + 2\left(\sqrt{x} - \ln\sqrt{x}\right) + 1$;
(d) $F(x) = xe^{-x} - e^{-x} + 2\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)$.

28. Să se calculeze

$I = \displaystyle\int_{2000}^{2001} [x]\, dx + \int_0^2 \frac{2x - [x]}{x + [x+2] - 1} dx,$

unde $[u]$ este partea întreagă a lui u.

(a) $I = 2000 + 5\ln 3 - 12\ln 2 + 4$;
(b) $I = 5\ln 3 - 12\ln 2 + 2$;

(c) $I = 2001 + 5\ln 3 - 10\ln 2 + 4$;
(d) $I = 2 + 4\ln 3 - 12\ln 2$.

29. Fie dreapta (d) de ecuaţie $x - 2y + 2 = 0$ şi $A(x_A, y_A)$ un punct oarecare al acesteia. Se consideră punctele $B(x_A, -3x_A)$, $C(-3x_A, y_A)$ şi D mijlocul segmentului $[BC]$. Valoarea minimă a lungimii segmentului $[AD]$ este:
(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; **(b)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$; **(c)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$; **(d)** $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

30. Fie $u = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ şi $z = 5(\cos u + i \sin u)$. Atunci $|z| + \operatorname{Re} z$ este:
(a) $\frac{28}{5}$; **(b)** 8; **(c)** 5; **(d)** $\frac{19}{3}$.