Model 4 test admitere

1. Numărul de elemente ale mulţimii

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid (2-x)\left(x^2-30\right) \geq 0\right\}$$

este:

(a) 1; (b) 4; (c) 5; (d) 3.

Soluţie. $(2-x)(x^2-30) \geq 0$, $x \in \left(-\infty, -\sqrt{30}\right] \cup \left[2, \sqrt{30}\right] \cap \mathbb{N} = \{2,3,4,5\}$

Răspuns corect (b).

2. Numărul de elemente ale mulţimii

$$A = \left\{z \in \mathbb{Q} \mid z = \frac{x}{(x+8)(x+9)}, x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 15\right\}.$$

este:

(a) 28; (b) 29; (c) 31; (d) 26.

Soluţie. A este mulţimea valorilor funcţiei $f(x) = \frac{x}{(x+4)(x+5)}$ definită pe mulţimea $\{-15,-14,...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...,14,15\} \setminus \{-9,-8\}$.

Dacă funcţia ar fi injectivă numărul valorilor ar fi $31-2=29$.

Determinăm numărul perechilor pentru care $f(x)=f(y), x \neq y$.

$\dfrac{x}{(x+8)(x+9)} - \dfrac{y}{(y+8)(y+9)} = \dfrac{-(x-y)(xy-72)}{(x^2+17x+72)(y^2+17y+72)}$,

$-(x-y)(xy-72)=0 \Rightarrow xy=72, x,y \in \mathbb{Z}, |x| \leq 15, |y| \leq 15 \Rightarrow$

$(x,y) \in \{(-6,-12)(6,12),(8,9)\}$.

numărul valorilor $29-3=26$

Răspuns corect (d).

3. Mulţimea valorilor reale ale parametrului m pentru care graficul funcţiei

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2+2mx+9$$

intersectează axa Ox în două puncte distincte este:

(a) $(-3,3)$; (b) $(0,3)$;

(c) $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$ (d) $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$.

Soluţie. $\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = 4m^2-36 = 4(m^2-9) > 0 \Rightarrow m \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$.

Răspuns corect: (c).

4. Valorea expresiei $b^2 + c^2, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - bx + c$$

are valoarea minimă 4 în punctul $x = 1$ este:
(a) 26 $\quad$ (b) 29 $\quad$ (c) 13 $\quad$ (d) 20.

Solutie. $x_{\min} = \dfrac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2, f_{\min} = f\left(1\right) = 4 = 1 - b + c \Rightarrow c = 5.$
Răspuns corect: (b).

5. Se dau punctele $A\left(1, -1\right),\ B\left(0, 2\right),\ C\left(5, 0\right)$. Mulţimea punctelor $M\left(x, y\right)$ pentru care $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 6$ este:
(a) dreapta de ecuatie $9x - y - 25 = 0$;
(b) cercul de centru $D\left(4, 1\right)$ si raza $R = 1$;
(c) dreapta de ecuatie $3x - y - 4 = 0$;
(d) cercul de ecuatie $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$.

Solutie. Daca $M\left(x, y\right)$ este un punct al mulţimii căutate, atunci egalitatea din enunţ se scrie

$$\left(x-1\right)^2 + \left(y+1\right)^2 + x^2 + \left(y-2\right)^2 - 2\left(x-5\right)^2 - 2y^2 = 6,$$

$18x - 2y - 44 = 6$ sau, echivalent, $9x - y - 25 = 0$.
Răspuns corect: (a).

6. Derivata funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \int_x^{x^4} e^{t^2} \sin t \cdot dt$$

este:
(a) $e^{x^4} \cdot \sin x^4 - e^{x^2} \sin x$ $\quad$ (b) $e^{x^4} \cdot \sin x^4 + e^{x^2} \cos x$
(c) $4x^3 \cdot e^{x^8} \cdot \sin x^4 - e^{x^2} \sin x$ $\quad$ (d) $4x^3 \cdot e^{x^4} \cdot \sin x^4 - e^{x^2} \sin x$.

Solutie. Fie G o primitivă a funcţiei $g(t) = e^{t^2} \sin t$.
Atunci $f\left(x\right) = G\left(x^4\right) - G\left(x\right) \Rightarrow$
$f'\left(x\right) = G'\left(x^4\right) \cdot 4x^3 - G'\left(x\right) = g\left(x^4\right) \cdot 4x^3 - g\left(x\right) = 4x^3 \cdot e^{x^8} \cdot \sin x^4 - e^{x^2} \sin x$.
Răspuns corect: (c).

7. Primitivele funcţiei:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}},$$

pentru $x \in (0, +\infty)$, sunt:

(a) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$;
(b) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$;
(c) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+C$;
(d) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}+C$.

Solutie. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt[6]{x}=t$ sau $x=t^6$. Atunci $dx=6t^5dt$ si deci

$I=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$
$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C$.

Revenind la variabila x, obtinem $I=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$.

Răspuns corect: (a).

8. Pentru fiecare $a\in\mathbb{R}$, notăm cu $E(a)$ valoarea minimă a expresiei x^2+y^2 când punctul de coordonate (x,y) aparţine dreptei $x-y+a=0$. Atunci valoarea sumei

$$E(1)+E\left(\sqrt{2}\right)+E\left(\sqrt{3}\right)+...+E\left(\sqrt{12}\right)$$

este divizibilă cu:

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 15.

Solutie. $y=x+a, x^2+y^2=x^2+(x+a)^2=2x^2+2ax+a^2$
$f(x)=2x^2+2ax+a^2, x_{\min}=-\frac{a}{2}, f_{\min}=-\frac{4a^2-8a^2}{8}=\frac{1}{2}a^2$
$E(1)+E\left(\sqrt{2}\right)+E\left(\sqrt{3}\right)+...+E\left(\sqrt{12}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}2+\frac{1}{2}3+...+\frac{1}{2}12=\frac{12\cdot 13}{4}$.

Răspuns corect: (c).

9. Se dau dreptele de ecuaţii $(d_1):x+y-2=0$, $(d_2):3x-2y+1=0$. Ecuaţia dreptei ce trece prin punctul $M(2,3)$ şi prin punctul de intersectie a dreptelor d_1 şi d_2 este:

(a) $8x-7y+5=0$; (b) $-7x+8y-10=0$;
(c) $-8x+5y+1=0$; (d) $7x+8y-40=0$.

Solutie. Coordonatele punctului A de intersectie dintre dreptele d_1 si d_2

$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3}{5}, y=\frac{7}{5}$

Se obtine $A\left(\frac{3}{5},\frac{7}{5}\right)$. Ecuatia dreptei ce trece prin A si M este

$$\frac{x-x_M}{x_A-x_M}=\frac{y-y_M}{y_A-y_M},$$

adică $\dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y-3}{-8}$ sau $8x-7y+5=0$.

Răspuns corect: (a)

10. Fie
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^{x-1}-1, & x<1 \\ x^3-1, & x\geq 1 \end{cases}.$$
Valoarea integralei $\int_0^2 f(x)\,dx$ este:

(a) $\frac{1}{e}-\frac{11}{4}$; (b) $-\frac{1}{e}+\frac{11}{4}$; (c) $-e+\frac{9}{4}$; (d) $e-\frac{9}{4}$.

Solutie. $\int\limits_0^1 (e^{x-1}-1)\,dx+\int\limits_1^2 (x^3-1)\,dx=\frac{11}{4}-e^{-1}$.

Răspuns corect: (b).

11. Fie
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2e^{-x}.$$
Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei pentru care $F(0)=1$ atunci $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ este:

(a) 3 (b) ∞ (c) 0 (d) nu există.

Solutie. $\int x^2e^{-x}dx=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+C$

$F(x)=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+C, F(0)=-2+C, -2+C=1\Rightarrow C=3$

Răspuns corect: (a).

12. Dacă matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A\neq 0_2$, verifică relaţia $A^2=0_2$, $0_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ atunci

(a) $a+d=0, ad-bc=0$ (b) $a+d=0, ad-bc=1$

(c) $a+d=0, ad-bc=-1$ (d) $a+d=1, ad-bc=1$

Soluţie. *Varianta I.* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)\,b \\ (a+d)\,c & d^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a+d=0, a=-d\Rightarrow a^2+bc=bc-ad=0$

Varianta II. Orice matrice de ordin doi verifică teorema Cayley-Hamilton, $A^2-\mathrm{Tr}(A)A+\det(A)I_2=0_2$

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=0_2, A^2=0_2\Rightarrow -(a+d)A+(ad-bc)I_2=0_2$

Răspuns corect: (a)

13. Mulţimea tuturor numerelor reale care satisfac inecuaţia:
$$x^{\sqrt{x}}<\left(\sqrt{x}\right)^x$$

este:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $(0,1)\cup(4,\infty)$ (c) $(-1,1)\cup(4,\infty)$ (d) nu există.

Soluţie. Condiţii de existenţă $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$

$\ln x^{\sqrt{x}} < \ln\left(\sqrt{x}\right)^x \Rightarrow \sqrt{x}\ln x < x\ln\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}\ln x - \frac{1}{2}x\ln x < 0$

$\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\ln x < 0 \Rightarrow x\in(0,1)\cup(4,\infty)$

Răspuns corect: (b)

14. Se consideră funcţia

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2e^{x^3}, & x\in[-1,0)\\ x^3e^{x^2}, & x\in[0,1]\end{cases}.$$

Fie $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$ şi $L=\lim\limits_{n\to\infty}n\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}f(x)dx$. Atunci valorile lui I şi L sunt:

(a) $I=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}e^{-1}, L=0;$ (b) $I=\frac{1}{3}\left(e-e^{-1}\right), L=-1;$
(c) $I=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}e^{-1}, L=1;$ (d) $I=\frac{1}{3}\left(e^{-1}-e^{1}\right), L=0.$

Soluţie.

$I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}x^2e^{x^3}dx+\int\limits_{0}^{1}x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-1}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}e^{-1}$

$\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{2n^2}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-n^2e^{\frac{1}{n^2}}+n^2\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-n^2e^{\frac{1}{n^2}}+n^2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(e^{\frac{1}{n^2}}+\frac{1-e^{\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n^2}}\right)=0$

Răspuns corect: (a).

15. Fie

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=m.$$

Valoarea funcţiei trigonometrice $\sin 2x$ exprimată în funcţie de m, $m\neq 0$, dacă $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ este:

(a) $\dfrac{2+2\sqrt{1+m^2}}{m^2};$ (b) $\dfrac{2-2\sqrt{1+m^2}}{m^2};$
(c) $\dfrac{-2-2\sqrt{1+m^2}}{m^2};$ (d) $\dfrac{-2+2\sqrt{1+m^2}}{m^2}.$

Soluţie.

$\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=m\Rightarrow\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\sin^2x\cos^2x}=m^2\Rightarrow m^2\sin^2 2x-4\sin 2x-4=0$

$\sin 2x=\dfrac{2\pm2\sqrt{1+m^2}}{m^2}$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow 2x \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \sin 2x < 0.$
Răspuns corect: (b).

16. Fie
$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos 3x}{b}, a, b \in (0, \infty), a \geq b, \cos x \neq 0.$$
Valoarea funcţiei trigonometrice $\operatorname{tg}^2 x$ este:
$(a)\ \frac{a+b}{3a+b}$ $(b)\ \frac{a-b}{3a+b}$ $(c)\ \frac{2a+b}{2a}$ $(d)\ \frac{a-b}{2a+b}$.
Soluţie.
$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos 3x}{b} = \frac{\cos x + \cos 3x}{a+b} = \frac{2\cos x \cos 2x}{a+b}$
$\cos 2x = \frac{a+b}{2a}, 2\cos^2 x - 1 = \frac{a+b}{2a} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3a+b}{4a}$
$\operatorname{tg}^2 x = -1 + \frac{1}{\cos^2 x} = -1 + \frac{4a}{3a+b} = \frac{a-b}{3a+b}.$
Răspuns corect: (b).

17. Fie
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$
Precizaţi care din următoarele relaţii este adevărată:
$(a)\ I \in [-1, 0]$; $(b)\ I \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]$; $(c)\ I \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; $(d)\ I \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Soluţie. $f(x) = \frac{\sin x}{x}, f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
$h(x) = x\cos x - \sin x$
$h'(x) = -x\sin x < 0 \Rightarrow h$ monoton descrescătoare, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$
$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ monoton descrescătoare, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\sin x}{x} \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} dx \Rightarrow$
$\frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$
Răspuns corect (c).

18. Fie funcţia

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos(n\arccos x).$$

Valoarea numărului n natural pentru care volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox să fie egală cu $\dfrac{14\pi}{15}$ este:

(a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) 2.

Soluţie.

$V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\cos^2(n\arccos x)dx$

$\arccos x=t, x=\cos t, dx=-\sin tdt, x=-1\Rightarrow t=\pi, x=1\Rightarrow t=0$

$V=\pi\int\limits_{\pi}^{0}\cos^2(nt)\,(-\sin t)\,dt=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}(1+\cos 2nt)\sin tdt=$

$=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{2}\left(\sin(2n+1)t+\sin(-2n+1)t\right)\right)dt=$

$\frac{\pi}{2}\left(-\cos t|_0^\pi+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n+1}\cos\left(2n+1\right)t\right)-\left(-\frac{1}{2n-1}\cos\left(2n-1\right)t\right)\Big|_0^\pi\right)=$

$=\frac{\pi}{2}\left(2-\frac{2}{4n^2-1}\right)=2\pi\frac{2n^2-1}{4n^2-1}$

$2\pi\frac{2n^2-1}{4n^2-1}=\dfrac{14\pi}{15}\Rightarrow n=2.$

Răspuns corect (d).

19. Toate matricele reale de ordin doi de forma

$$X=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

care verifică relaţia:

$$X^2-2aX+\left(a^2+b^2\right)I_2=0$$

sunt:

(a) $\begin{pmatrix} a & c\\ c & a\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} a & 0\\ c & a\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} a & 0\\ c & a\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} a & -c\\ c & a\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}.$

Soluţie. X verifică relaţia: $X^2-(a+d)\,X+(ad-bc)\,I_2=0$, de unde rezultă

$2a=a+d\Rightarrow a=d$

$ad-bc=a^2+b^2\Rightarrow b^2+bc=0\Rightarrow b=0$ sau $c=-b$

$\begin{pmatrix} a & 0\\ c & a\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}.$

Răspuns corect (b).

20. Fie sistemul:

$$\begin{cases} ax + (a+1)\,y + (a+2)\,z = a+3 \\ bx + (b+1)\,y + (b+2)\,z = b+3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases}$$

Toate valorile parametrilor reali a, b şi c pentru care sistemul este compatibil nedeterminat sunt:

(a) $c = 1$ (b) $a = b$ (c) $c = 0$ (d) $c = 1$ sau $a = b$.

Soluţie.

$\det \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = a - b + ac^2 - bc^2 - 2ac + 2bc = (c-1)^2\,(a-b)$

$c - 1 = 0, a \neq b$

$\Delta_{c_1} = \det \begin{pmatrix} a & a+1 & a+3 \\ b & b+1 & b+3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$

$a = b, c \neq 1, \Delta_{c_2} = 0.$

Răspuns corect (d).

21. Pentru fiecare număr real x se consideră:

$$E(x) = \sqrt{2x + 19 - 8\sqrt{2x+3}} + \sqrt{2x + 7 - 8\sqrt{2x+3}}.$$

Pentru $x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{13}{2}\right]$ valoarea lui $E(x)$ este:

(a) 2 (b) $2\sqrt{2x+3} - 6$ (c) -2 (d) 0.

Soluţie.

$E(x) = \left|\sqrt{2x+3} - 4\right| + \left|\sqrt{2x+3} - 2\right|$

$x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right] \Rightarrow E(x) = 4 - \sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+3} - 2 = 2.$

Răspuns corect (a).

22. Fie ecuaţia

$$x^5 + 5x^3 + 5x - 2m = 0.$$

Numărulde rădăcini reale ale ecuaţiei pentru orice $m \in \mathbb{R}$ este:

(a) 0; (b) 1; (c) 3; (d) 5.

Soluţie. $P(x) = x^5 + 5x^3 + 5x - 2m, P'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \infty \Rightarrow$polinomul intersectează axa Ox într-un singur punct.

Răspuns corect: (b).

23. Se consideră polinomul $P(x)$ de grad cel puţin doi care satisface condiţiile:
a) $P(x)$ împărţit la $x+1$ dă restul 2,
b) $(x+1)\,P(x)+xP(x+3)=1$.
Restul împărţirii polinomului $P(x)$ la x^2-x-2 este:
(a) $x-1$; (b) $-x+1$; (c) 1; (d) 0.
Soluţie. $x^2-x-2=(x+1)\,(x-2)\,, P(x)=Q(x)\,(x+1)\,(x-2)+ax+b$
$P(-1)=2 \Rightarrow -a+b=2$.
În relaţia b) facem $x=-1 \Rightarrow -P(2)=1 \Rightarrow -2a-b=1$
$$\begin{cases} -a+b=2 \\ -2a-b=1 \end{cases} \Rightarrow [a=-1, b=1]$$
Răspuns corect: (b).

24. Numărul soluţiilor din $\mathbb{Z}_6$ ale ecuaţiei
$$\hat{4}x+\hat{2}=\hat{3}.$$
este:
(a) 4 (b) 6 (c) 2 (d) 0.
Soluţie. $-\hat{2}=\hat{4}, \hat{4}x+\hat{2}=\hat{3} \Rightarrow \hat{4}x=\hat{4}+\hat{3} \Rightarrow \hat{4}x=\hat{1}$.
Ecuaţia nu are soluţii.
Răspuns corect: (d).

25. Suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei
$$\left(x^2+1\right)^7-6\left(x^2+1\right)+9=0$$
este:
(a) 14; (b) -14; (c) 7; (d) 0.
Soluţie. $(x^2+1)^7-6\,(x^2+1)+9=x^{14}+7x^{12}+\sum\limits_{k=0}^{11} a_k x^k$.
Coeficienţii $a_k, k=0,...,11$ nu intervin în calculele din problemă.
$\sum\limits_{k=1}^{14} x_k=0$
$\sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{14} x_i x_k=7 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{14} x_k^2=\left(\sum\limits_{k=1}^{14} x_k\right)^2-2\sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i<}}^{14} x_i x_k=-14$
Răspuns corect: (b).

26. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ şi $f : [0, b-a] \to \mathbb{R}$, strict pozitivă şi continuă pe intervalul de definiţie. Valoarea integralei:

$$\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx$$

este:

(a) 0; (b) $\frac{b-a}{2}$; (c) $\frac{f(b+a)-f(b-a)}{2}$; (d) $\frac{f(b)+f(a)}{2}$.

Soluţie. Schimbarea de variabilă $x = a + b - t$,

$x = a \Rightarrow t = b; x = b \Rightarrow t = a$

$I = \int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx = \int_b^a \frac{f(b-t)}{f(b-t)+f(t-a)}(-dt) =$

$= \int_a^b \frac{f(b-t)}{f(b-t)+f(t-a)}dt$

$2I = \int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx + \int_a^b \frac{f(b-t)}{f(b-t)+f(t-a)}dt = \int_a^b dt = b-a$

Răspuns corect (a).

27. Mulţimea tuturor punctelor în care funcţia:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$$

este derivabilă este:

(a) $\mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; (c) $(-1, 1)$; (d) $[-1, 1]$.

Soluţie. Evident $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{2\left(x^2+1\right)-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} = -\frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left|x^2-1\right|} = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1}, & \text{dacă } |x| < 1 \\ -\frac{2}{x^2+1}, & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}.$$

$\lim\limits_{x \nearrow -1} f'(x) = 1, \lim\limits_{x \searrow -1} f'(x) = -1,$

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f'(x) = -1, \lim\limits_{x \searrow 1} f'(x) = 1.$

Răspuns corect (b).

28. Fie funcţiile:

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ u(x) &= \frac{2|x|}{x^2+1}, a > 0, a \neq 1, \\ f(x) &= a^{u(x)}. \end{aligned}$$

Toate valorile lui a pentru care

$$1 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

sunt:

(a) $\mathbb{R}$; (b) $(0,1)$; (c) $(1,2]$; (d) $(1,2)$.

Soluţie. Evident $0 \leq \frac{2|x|}{x^2+1} \leq 1$.

Pentru $0 < a < 1 \Rightarrow a < f(x) < 1$.

Pentru $a > 1 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq a$, dar $1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow 1 < a \leq 2$.

Răspuns corect (c).

29. Se consideră polinomul:

$$P(x) = x^{2016} - x^{1989} + x^{1944} - x^{1600} + x^4 + x^3 + 1$$

Atunci valoarea lui $P(i), i^2 = -1$, este:

(a) $1+i$; (b) i; (c) 0; (d) $-2i+3$.

Soluţie. Se ştie că: $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$

$P(i) = i^{4\cdot 504} - i^{4\cdot 497+1} + i^{4\cdot 486} - i^{4\cdot 400} + i^4 + i^3 + 1 = -2i + 3$

Răspuns corect: (d).

30. Ecuaţiile dreptelor ce trec prin punctul $(1,2)$ şi sunt egal depărtate de punctele $(3,3)$ şi $(5,2)$ sunt:

(a) $x + 2y - 5 = 0, x - 6y + 11 = 0$; (b) $2x + y - 4 = 0, x - 6y + 11 = 0$;

(c) $x + 2y - 5 = 0, -6x - 3y + 11 = 0$; (d) $2x + y - 4 = 0, -x - 6y + 11 = 0$;

Soluţie. Sunt două drepte:

- o dreaptă care trece prin punctul de coordonate $(1,2)$ şi este paralelă cu dreapta determinată de punctele $(3,3)$ şi $(5,2)$, $x + 2y - 5 = 0$,

- o dreaptă care trece prin punctul de coordonate $(1,2)$ şi prin mijlocul segmentului determinat de punctele $(3,3)$ şi $(5,2)$, $x - 6y + 11 = 0$.

Răspuns corect: (a).