

Model 6 test admitere AC

1. Valoarea parametrului real t pentru care ecuațiile $tx^2 + x + 1 = 0$ și $x^2 + tx + 1 = 0$ au exact o soluție comună este:

a) 1 b) $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$ c) -1 d) -2.

Soluție. Pentru $t = 0$ ecuațiile devin $x + 1 = 0$, respectiv $x^2 + 1 = 0$ iar acestea nu au soluție comună. Observăm, de asemenea, că pentru $t = 1$ cele două ecuații coincid deci au două soluții comune. Eliminând x^2 din cele două ecuații se obține

$$x + 1 = t^2x + t \Leftrightarrow x(t^2 - 1) + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(x(t + 1) + 1) = 0,$$

de unde deducem imediat că $t \neq -1$ și $x = -\frac{1}{t + 1}$. Înlocuind în prima ecuație și făcând calculele se obține $t = -2$.

Răspuns corect: (d).

2. Considerăm familia de funcții de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - 2mx + m$, $m \in \mathbb{R}$. Notăm cu $V_m(x_m, y_m)$ vârfurile parabolilor asociate. Atunci:

- (a) Pentru $m \in (-\infty, 0]$, V_m se află la dreapta axei Oy .
 (b) Pentru $m \in [0, +\infty)$, V_m se află deasupra axei Ox .
 (c) Pentru $m \in [0, 1]$, V_m se află în cadranul I.
 (d) Pentru $m \in [1, +\infty)$, V_m se află în cadranul al II-lea.

Soluție. Evident, V_m are coordonatele $x_v = m$, $y_v = -m^2 + m$. Făcând tabelul semnelor, obținem

m	$-\infty \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots 1 \dots \dots \dots +\infty$
x_v	$- - - - - 0 + + + + + + + + +$
y_v	$- - - - - 0 + + + + 0 - - - - -$

Răspuns corect: (c).

3. Mulțimea de definiție a funcției $f(x) = \arcsin(\ln(1 - \sqrt{1 - x}))$ este:

a) $\left[\frac{2e - 1}{e^2}, 1\right]$ b) $[0, 1]$ c) $\left[-1, \frac{2e - 1}{e^2}\right]$ d) $\left[\frac{2e - 1}{e^2}, 1\right)$.

Soluție. Condițiile de existență sunt:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{1 - x} > 0 \\ -1 \leq \ln(1 - \sqrt{1 - x}) \leq 1 \end{cases}$$

Se obține imediat $x \in \left[\frac{2e - 1}{e^2}, 1\right]$.

Răspuns corect: (a).

4. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale astfel încât șirul $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este o progresie geometrică. Se știe că $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ iar rația progresiei geometrice este $q = 4$. Atunci,

(a) $a_n = 2^{(n-1)^2}$, pentru orice $n \geq 1$

(b) $a_n = 2^{n^2+2n}$, pentru orice $n \geq 1$

(c) $a_n = 2^{n^2}$, pentru orice $n \geq 1$

(d) $a_n = 2^n$, pentru orice $n \geq 1$

Soluție. Relațiile din enunț conduc la

$$a_{n+1} = a_n \cdot b \cdot q^{n-1}.$$

Mai departe, a vem:

$$a_{n+1} = a_{n-1} \cdot b \cdot q^{n-2} \cdot b \cdot q^{n-1}$$

ș.a.m.d.

$$a_{n+1} = a_1 \cdot b \cdot q^0 \cdot b \cdot q^1 \cdot \dots \cdot b \cdot q^{n-1}.$$

Adică,

$$a_{n+1} = a_1 \cdot b^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Înlocuind, obținem $a_{n+1} = 2^{(n-1)^2}$.

Răspuns corect: (a).

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \alpha x + 1$. Atunci,

(a) Pentru $\alpha \in (-\infty, 0)$ funcția este bijectivă;

(b) Funcția f este injectivă pentru $\alpha \geq 0$;

(c) Funcția f este periodică de perioadă 1.

(d) Funcția f nu este surjectivă dacă $\alpha < 0$.

Soluție. Evident, funcția nu este periodică de perioadă 1. În caz contrar, ar trebui să avem, de exemplu, $f(0) = f(1) = f(2)$, adică $1 = \alpha + 2 = 2\alpha + 9$, ceea ce este fals. Funcția este surjectivă deoarece este continuă și

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Deoarece $f'(x) = 3x^2 + \alpha$, rezultă imediat că f nu este injectivă pentru niciun $\alpha < 0$ și, pe de altă parte, este strict crescătoare, deci injectivă pentru orice $\alpha \geq 0$. (Cazul $\alpha = 0$ trebuie discutat separat).

Răspuns corect: (b).

6. Determinând valorile reale ale lui x pentru care are loc relația

$$|x|^{2x^2-3x+1} \leq 1$$

se obține:

(a) $x \in [-1, 1]$;

(b) $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$;

(c) $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$;

(d) $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right)$.

Soluție. Observăm că relația este adevărată pentru $x = 0$. Pentru $x \neq 0$ logaritmăm în baza e și obținem, echivalent,

$$(2x - 1)(x - 1) \ln |x| \leq 0.$$

Tabelul de semn pentru membrul stâng este:

x	$-\infty \dots$	$-1 \dots$	$0 \dots$	$\frac{1}{2} \dots$	$1 \dots$	$+\infty$
$\ln x $	+++	0--		--	0++	++
$(2x - 1)(x - 1)$	++	++	++	0--	0+	++
$(2x - 1)(x - 1) \ln x $	++	0--	--	0++	0+	++

Răspuns corect: (c).

7. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x 4^{1-x} + 3^{1-x} 4^x$. Atunci,

(a) Funcția f este descrescătoare pe $[0, 1]$

(b) Funcția f este crescătoare pe $[0, 1]$

(c) Funcția f este crescătoare pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ și descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(d) Funcția f este descrescătoare pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ și crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Soluție. Putem scrie $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$. Dar,

$$f'(x) = \ln \frac{3}{4} \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}\right)$$

și cum $\ln \frac{3}{4} < 0$, rezultă imediat că $f'(x) \geq 0$ pentru $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ și $f'(x) \leq 0$ pentru $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Răspuns corect: (d).

8. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$. Se știe că $X^2 + 1$ divide f și notăm cu g câtul împărțirii lui f la $X^2 + 1$. Atunci,

(a) $g(1) + g(2) + \dots + g(n^4) = 1224$

(b) $g(1) + g(2) + \dots + g(n^4) = 1768$

(c) $g(1) + g(2) + \dots + g(n^4) = -612$

(d) $g(1) + g(2) + \dots + g(n^4) = 612$

Soluție. Impunând condiția ca $f: g$ se obțin imediat $n = -2$ și $p = 0$ iar $g = X^2 - 2X$. Atunci, pentru orice N număr natural nenul, avem:

$$S = \sum_{k=1}^N g(k) = \sum_{k=1}^N k^2 - 2 \sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - 2 \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N(N+1)(2N-5)}{6}.$$

În cazul nostru, $N = n^4 = 16$ și $S=1224$.

Răspuns corect: (a).

9. Considerăm un polinom f cu coeficienți numere întregi care ia valoarea $+1$ în 4 numere întregi distincte. Atunci,

- (a) f ia valoarea -1 în 4 numere întregi distincte.
- (b) f ia valoarea -1 în 3 numere întregi distincte.
- (c) f ia valoarea -1 în cel puțin 1 număr întreg.
- (d) Nu există numere întregi k , pentru care $f(k) = -1$.

Soluție. Este binecunoscut faptul că dacă un polinom f cu coeficienți întregi are o rădăcină $a \in \mathbb{Z}$, atunci câtul împărțirii lui f la $X - a$ este de asemenea un polinom cu coeficienți întregi. Fie a, b, c, d cele 4 numere întregi în care f are valoarea 1. Atunci, a, b, c, d sunt rădăcinile polinomului cu coeficienți întregi $g = f - 1$. Putem, deci, scrie

$$g = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)q,$$

unde q este un polinom cu coeficienți întregi (conform observației de la început). Dacă ar exista un număr întreg k astfel încât $f(k) = -1$, am avea

$$-2 = g(k) = (k - a)(k - b)(k - c)(k - d)q(k).$$

Deoarece $q(k) \neq 0$ și $k \notin \{a, b, c, d\}$, relația de mai sus spune că numărul -2 poate fi scris ca un produs de 5 numere întregi nenule din care 4 sunt mutual disjuncte, ceea ce este, evident, fals.

Răspuns corect: (d).

10. Fie $\lambda \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât cel mai mare termen din dezvoltarea $(\lambda + (1 - \lambda))^{2016}$ este T_{101} . Atunci,

- (a) $[2016\lambda]=1915$;
- (b) $[2016\lambda]=1916$;
- (c) $[2016\lambda]=1914$;
- (d) $[2016\lambda]=2015$;

Soluție. Termenul general este

$$T_{k+1} = C_{2016}^k \lambda^{2016-k} \cdot (1 - \lambda)^k.$$

Atunci,

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{C_{2016}^{k+1}}{C_{2016}^k} \cdot \frac{1 - \lambda}{\lambda} = \frac{2015 - k}{k + 1} \cdot \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

și, deoarece T_{101} este termenul maxim, rezultă

$$\frac{T_{101}}{T_{100}} \geq 1, \quad \frac{T_{102}}{T_{101}} \leq 1.$$

Deoarece λ este irațional rezultă că inegalitățile anterioare sunt stricte. Obținem, astfel, pentru $k = 99$ și, respectiv, $k = 100$

$$\frac{1916}{100} \cdot \frac{1 - \lambda}{\lambda} > 1, \quad \frac{1915}{101} \cdot \frac{1 - \lambda}{\lambda} < 1,$$

de unde, mai departe

$$\frac{100}{1916} < \frac{1-\lambda}{\lambda} < \frac{101}{1915} \Leftrightarrow \frac{2016}{1916} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2016}{1915} \Leftrightarrow 1915 < 2016\lambda < 1916$$

Răspuns corect: (a).

11. Fie ω o rădăcină a ecuației $x^2 - x + 1 = 0$. Atunci, valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & \omega & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \end{vmatrix} \text{ este}$$

- (a) număr natural
- (b) număr complex pur imaginar
- (c) număr rațional dar nu întreg
- (d) număr irațional

Soluție. Deoarece $\omega^2 - \omega + 1 = 0$ și $\omega \neq -1$, obținem, prin înmulțirea relației cu $\omega + 1$ faptul că $\omega^3 = -1$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & \omega & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \end{vmatrix} = \omega^6 - 2\omega^3 + 1 = 4,$$

răspunsul corect este (a).

12. Fie în $\mathbb{Z}_3$ sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \hat{0} \\ x + y + \lambda z = \hat{1} \\ x + \lambda y + z = \hat{2} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{Z}_3.$$

Atunci,

- (a) Pentru $\lambda = \hat{1}$ sistemul are o infinitate de soluții;
- (b) Sistemul este incompatibil pentru orice $\lambda \in \mathbb{Z}_3$;
- (c) Pentru $\lambda = \hat{0}$ sistemul are soluție unică;
- (d) Pentru $\lambda = \hat{2}$ sistemul are 2 soluții distincte.

Soluție. Se calculează imediat că determinantul sistemului este $\hat{0}$ doar pentru $\lambda = \hat{1}$ dar oricum, numărul maxim de soluții este egal cu 27.

Răspunsul corect este (c).

13. Considerăm mulțimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Considerăm perechea $(G, \cdot)$ unde $\cdot$ este înmulțirea uzuală a matricelor. Atunci,

- (a) Elementul neutru este $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și orice element este inversabil

în raport cu operația ” $\cdot$ ”.

(b) Elementul neutru este $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și orice element este inversabil

în raport cu operația "·."

(c) Elementul neutru este $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și există elemente din G neinverseabile în raport cu operația "·."

(d) Operația "·" nu admite element neutru în G .

Soluție. Se verifică prin calcul direct că elementul neutru este cel de la pct (b) dar un element din G este inversabil dacă și numai dacă $|a| = |c| = 1$.

Răspuns corect este (c).

14. Considerăm șirul definit recurent prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$. Atunci

- (a) Șirul a_n este mărginit dar divergent;
- (b) Șirul a_n este convergent și $\lim a_n \in (0, 2)$;
- (c) Șirul a_n este convergent și $\lim a_n = \sqrt{2}$;
- (d) Șirul a_n este convergent și $\lim a_n = 2$.

Soluție. Se arată ușor, prin inducție, că $a_n \in [0, 2]$, și că a_n este strict crescător

Răspuns corect : (a).

15. Fie limita

$$L = \lim_{x \rightarrow 0_+} x \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor \right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci,

- (a) $L = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- (b) $L = n^2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- (c) $L = 2016$ pentru $n = 1008$;
- (d) $L = 2016$ pentru $n = 63$.

Soluție. Rezolvarea se bazează pe faptul că

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}, \quad \forall a, b > 0.$$

(De fapt, nu contează că e 0_+ , dar ușurează discuția). Este clar că

$$\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = k \Leftrightarrow \frac{b}{x} \in [k, k+1) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{b}{k+1}, \frac{b}{k} \right]$$

și $x \rightarrow 0$ în același timp în care $k \rightarrow +\infty$. Pentru un k fixat și $x \in (\frac{b}{k+1}, \frac{b}{k}]$ avem

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{k}{k+1} < \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a}$$

și cum membrul stâng al dublei inegalități tinde la $\frac{b}{a}$ pentru $x \rightarrow 0$ rezultă, conform teoremei cleștelui, că

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x} \right] = \frac{b}{a}.$$

Atunci, limita din enunț este egală cu $\frac{n(n+1)}{2}$.

Răspuns corect: (d).

16. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in \mathbb{Q} \\ -bx^2 + cx, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Atunci,

- (a) Funcția f este discontinuă pe $\mathbb{R}$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- (b) Pentru $b = -1$ există $a \neq c$ astfel încât f să aibă un punct de continuitate diferit de $x = 0$;
- (c) Există valori pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq c$ astfel încât f este continuă pe $\mathbb{R}$;
- (d) Există valori pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq -1$ astfel încât f să aibă un punct de continuitate diferit de $x = 0$.

Soluție. Este cunoscut faptul că x este punct de continuitate dacă și numai dacă $x^2 + ax = -bx^2 + cx$, adică $x((b+1)x + (a-c)) = 0$. Rezultă imediat concluziile.

Răspuns corect: (d).

17. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \{x\}$, unde prin $\{x\}$ se înțelege partea fracționară a lui x . Atunci,

- (a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, $f'(x) = x + \{x\}$;
- (b) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f'(x) = 2x - [x]$;
- (c) Funcția f nu este derivabilă în nici un punct;
- (d) Funcția f nu este continuă în nici un punct;

Soluție. Având în vedere că $\{x\} = x - [x]$ rezultă că pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ și orice $x \in [k, k+1)$ avem $f(x) = x^2 - kx$. Este clar că f este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și

$$f'(x) = 2x - k = 2x - [x] = x + \{x\}$$

Răspuns corect: (b).

18. Considerăm funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(a \sin x)$, unde $a \in (0, \pi)$. Valoarea lui a pentru care unul din punctele date de teorema lui Rolle este $c = \frac{\pi}{4}$ este:

- (a) $\frac{\pi}{2}$
- (b) $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
- (d) Acestei funcții nu i se poate aplica

teorema lui Rolle.

Soluție. Se verifică imediat că putem aplica teorema lui Rolle, deci $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$. Astfel, $\cos(a \sin \frac{\pi}{4}) \cdot a \cos \frac{\pi}{4} = 0$ și deci $\frac{a}{\sqrt{2}} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. um $a \in (0, \pi)$, nu putem avea decât $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$, adică $a = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Răspuns corect: (c).

19. Pentru $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^m(1-x)^n$.

Atunci

- (a) Pentru m, n pare, f are 3 puncte de extrem local;
- (b) Pentru m, n impare, f are 3 puncte de extrem local;
- (c) Pentru m par și n impar, f are 3 puncte de extrem local;
- (d) Pentru m impar și n par, f are 3 puncte de extrem local;

Soluție. Determinăm mai întâi punctele critice: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow$

$$x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m(1-x) - nx) = 0.$$

Cum $m, n \geq 2$ rezultă că f are 3 puncte critice: 0, 1 și $\frac{m}{m+n}$. Tabelul de semn, în absența unor detalii referitoare la m și n este

x	$-\infty \dots 0 \dots \frac{m}{m+n} \dots 1 \dots +\infty$
x^{m-1}	$0 + + + + +$
$(1-x)^{n-1}$	$+ + + + + 0$
$m - (m+n)x$	$+ + + 0 - - -$
f'	$0 + + 0 - - 0$

Se remarcă imediat că pentru a avea 3 puncte de extrem trebuie ca $f'(x) \leq 0$ pentru $x < 0$ și $f'(x) \geq 0$ pentru $x > 1$, adică $m-1$ și $n-1$ trebuie să fie impare.

Răspuns corect: (a).

20. Fie $f : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \ln x$, unde $a \in \mathbb{R}$. Atunci,

- (a) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, orice primitivă a lui f este crescătoare pe $(0, 2)$;
- (b) Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care orice primitivă a lui f este descrescătoare;
- (c) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, nici o primitivă a lui f nu este monotonă;
- (d) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, orice primitivă a lui f este descrescătoare pe $(0, 2)$

Soluție. Este clar că orice primitivă a lui f este monotonă dacă f are semn constant pe $(0, 2)$. Având în vedere că $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$ iar ax este mărginită pe $(0, 2)$, trebuie ca $f(x) \leq 0$ pe $(0, 2)$. Atunci, problema revine la

$$\frac{\ln x}{x} \leq -a, \quad \forall x \in (0, 2)$$

Dar, se arată imediat că funcția $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ este crescătoare pe $(0, 2)$ și atunci trebuie ca $\frac{\ln 2}{2} \leq -a$. Deci, pentru $a \leq -\frac{\ln 2}{2}$ orice primitivă a lui f este descrescătoare pe $(0, 2)$.

Răspuns corect: (b).

21. Considerăm șirul (I_n) definit de integrala

$$I_n = \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx, \quad n \geq 1, \text{ unde } 0 < a < b.$$

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$;
- (b) Șirul I_n nu are limită;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = b - a$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = a \cdot b$

Soluție. Facem mai întâi schimbarea de variabilă $nx = t$ pentru a obține

$$I_n = \int_{na}^{nb} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Aplicăm mai departe integrarea prin părți:

$$I_n = -\frac{\cos t}{t} \Big|_{na}^{nb} - \int_{na}^{nb} \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{1}{n} \left(\frac{\cos na}{a} - \frac{\cos nb}{b} \right) - \int_{na}^{nb} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Dar,

$$\frac{1}{n} \left(\frac{\cos na}{a} - \frac{\cos nb}{b} \right) \rightarrow 0$$

pentru că paranteza este mărginită și $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, iar

$$\int_{na}^{nb} \frac{-1}{t^2} dt \leq \int_{na}^{nb} \frac{\cos t}{t^2} dt \leq \int_{na}^{nb} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_{na}^{nb} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \rightarrow 0.$$

Răspuns corect: (a).

22. Fie integrala $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + a \sin x} dx$, $a \in [0, 1]$. Atunci,

- (a) Valoarea minimă a integralei se atinge pentru $a = 0$ și este egală cu $\frac{\pi}{2}$;
- (b) Valoarea minimă a integralei se atinge pentru $a = 1$ și este egală cu $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$;
- (c) Valoarea maximă a integralei se atinge pentru $a = 0$ și este egală cu $\frac{\pi}{2}$;
- (d) Valoarea maximă a integralei se atinge pentru $a = 1$ și este egală cu $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Soluție. Este evident că valoarea minimă se obține pentru a maxim iar valoarea maximă a integralei se obține pentru a minim. Astfel, valoarea maximă este $\frac{\pi}{4}$ iar cea minimă este

$$I_{\min} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \sin x}$$

Folosim formula

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

și facem schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Obținem

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + t + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Răspuns corect: (b).

23. Graficul funcției $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ se rotește în jurul axei Oy .

Atunci, volumul corpului de rotație obținut este

(a) $\frac{\pi^2}{4}$ (b) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ (c) $\pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right)$ (d) $\frac{\pi^3}{2}$

Soluție. Este cunoscut că volumul unui corp de rotație obținut prin rotația graficului unei funcții $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ în jurul axei Ox este egal cu

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

În cazul nostru însă, rotația se face în jurul axei Oy și atunci formula de calcul revine la:

$$\left(V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))^2 dy \right)$$
$$V = \pi \int_0^1 \arcsin^2 y dy.$$

Aplicând integrarea prin părți obținem

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin^2 y dy &= y \arcsin^2 y \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin y dy = \frac{\pi^2}{4} + 2 \int_0^1 \left(\sqrt{1-t^2} \right)' \arcsin y dy \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2 \sqrt{1-t^2} \arcsin y \Big|_0^1 - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

Răspuns corect: (c).

24. Fie $f = x^3 + mx^2 + nx + 1$ un polinom de gradul 3 pentru care numărul real a este o rădăcină dublă.

- (a) Există o unică primitivă a lui f pentru care a este o rădăcină triplă.
- (b) Numărul a este rădăcină pentru orice primitivă a lui f ;
- (c) Există o primitivă a lui f pentru care a este rădăcină de ordin 4;
- (d) Există o infinitate de primitive ale lui f pentru care a este rădăcină triplă.

Soluție. Afirmatia de la pct (c) este evident falsă, altfel a ar trebui să fie rădăcină triplă pentru f . În condițiile ipotezei putem scrie

$$f = (x-a)^2 \left(x + \frac{1}{a^2} \right).$$

Primitivele lui f au forma

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x-a)^2 \left(x + \frac{1}{a^2} \right) dx = \frac{1}{3} (x-a)^3 \left(x + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{1}{3} \int (x-a)^3 dx \\ F(x) &= \frac{1}{3} (x-a)^3 \left(x + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{1}{12} (x-a)^4 + C. \end{aligned}$$

Devine astfel clar că pentru $C = 0$ obținem o primitivă având a rădăcină triplă și pentru orice $C \neq 0$, a nu este rădăcină pentru primitiva corespunzătoare.

Răspuns corect: (a).

25. Notăm cu S suma soluțiilor ecuației $\sin 4x + \sin 6x = 0$ din intervalul $[-2\pi, 2\pi]$.

Atunci,

- (a) $S = 0$; (b) $S = 8\pi$ (c) $S = 10\pi$ (d) $S = -10\pi$

Soluție. Evident, 0 pentru că dacă x este soluție pentru ecuația de mai sus, și $-x$ este soluție, iar intervalul de lucru este simetric.

Răspuns corect: (a).

26. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \pi x + \{x\}$ are proprietatea că:

- (a) este neperiodică;
(b) este periodică de perioadă 2π ;
(c) este periodică de perioadă 1;
(d) este periodică de perioadă 2.

Soluție. Deoarece $\sin x$ este funcție periodică de perioadă 2π rezultă că $\sin \pi x$ este periodică de perioadă 2. Pe de altă parte, partea fracționară este funcție periodică de perioadă principală 1.

Răspuns corect: (d).

27. Considerăm în plan punctele $A(2, 4)$, $B(-1, 1)$, $C(0, -2)$ și vectorul $\vec{u} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) $\vec{u}$ este coliniar cu $\vec{BC}$ pentru $a = 2$, $b = 2$;
(b) $\vec{u}$ este coliniar cu $\vec{BC}$ pentru $a = 1$, $b = 0$;
(c) $\vec{u}$ este perpendicular pe $\vec{BC}$ pentru $a = 8$ și $b = 3$;
(d) $\vec{u}$ este perpendicular pe $\vec{BC}$ pentru $a = 16$ și $b = -6$;

Soluție. Vectorul $\vec{u}$ este egal cu

$$\vec{u} = a(-3\vec{i} - 3\vec{j}) + b(-2\vec{i} - 6\vec{j}) = (-3a - 2b)\vec{i} + (-3a - 6b)\vec{j}$$

iar $\vec{BC} = \vec{i} - 3\vec{j}$. Coliniaritatea este echivalentă cu relația

$$\frac{-3a - 2b}{1} = \frac{-3a - 6b}{-3} \Leftrightarrow -3a - 2b = a + 2b \Leftrightarrow a + b = 0.$$

Perpendicularitatea este echivalentă cu

$$(-3a - 2b) \cdot 1 + (-3a - 6b) \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow 6a + 16b = 0.$$

Răspuns corect: (d).

28. Fie (d) o dreaptă de ecuație $x + 2y - 3 = 0$ și punctul $B(4, 0)$. Punctul C pentru care dreapta (d) este mediatoarea segmentului BC este

- (a) $C\left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ (b) $C\left(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ (c) $C\left(\frac{18}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ (d) $C\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Soluție. Pentru a găsi punctul C vom găsi mai întâi ecuația dreptei perpendiculare pe (d) . Punctul C se află pe această dreaptă astfel încât punctul de

intersecție al dreptei BC cu dreapta (d) este mijlocul segmentului $[BC]$. Pentru că $BC \perp (d)$ rezultă că produsul pantelor lor este egal cu -1 , deci panta dreptei BC este egală cu 2 . Rezultă că ecuația dreptei BC este

$$BC : y = 2(x - 4) \text{ sau, echiv. } 2x - y - 8 = 0.$$

Punctul de intersecție dintre BC și (d) este soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 8 \end{cases},$$

adică $\left(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. În fine, din relațiile

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{19}{5} \\ \frac{y_B + y_C}{2} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

se obține $C\left(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Răspuns corect: (b).

29. Un triunghi dreptunghic are lungimile laturilor în progresie aritmetică și aria egală cu 600cm^2 . Atunci, notând cu r raza cercului înscris și cu R raza cercului circumscris triunghiului, avem:

- (a) $r = 10, R = 25$;
- (b) $r = 15, R = 20$;
- (c) $r = 10, R = 20$;
- (d) $r = 15, R = 25$.

Soluție. Folosind teorema lui Pitagora se demonstrează că laturile triunghiului sunt direct proporționale cu 3, 4 și 5.

Răspuns corect: (a).

30. Fie $A(-2, 3)$ și $B(2, -1)$. Dacă centrul cercului înscris în triunghiul ABC are coordonatele $(1, 2)$ atunci punctul C are coordonatele:

- (a) $\left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$;
- (b) $\left(-\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)$;
- (c) $\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)$;
- (d) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{11}{3}\right)$.

Soluție. Deoarece $AI = BI = \sqrt{10}$ rezultă că punctul C se află pe mediatoarea laturii AB . Această mediatoare are ecuația

$$\begin{aligned} (m) : y - 1 &= -\frac{1}{m_{AB}}x \text{ sau, echivalent} \\ (m) : x - y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Deoarece I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , rezultă că $d(I, AB) = d(I, BC) = IM = \sqrt{2}$, unde $M(0, 1)$ este mijlocul segmentului $[AB]$. Putem scrie ecuația dreptei BC sub forma

$$\frac{x-2}{x_C-2} = \frac{y+1}{y_C+1} \Leftrightarrow (y_C+1)x + (2-x_C)y - x_C - 2y_C = 0$$

și atunci

$$d(I, BC) = \frac{|-3x_C - y_C + 5|}{\sqrt{(x_C-2)^2 + (y_C+1)^2}} = \sqrt{2}$$

și ținând cont că punctul C se află pe dreapta (m) , adică $x_C - y_C + 1 = 0$, obținem $C(\frac{8}{3}, \frac{11}{3})$.

Răspuns corect: (c).