Model 7 test admitere AC

1. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care graficele funcţiilor $f(x) = x^2 + mx + 1$ şi $g(x) = x^2 + x + m$ se intersectează pe axa Ox este:

(a) 0; (b) 1; (c) -1; (d) -2.

Soluţie. Pentru ca graficele celor două funcţii să se intersecteze în punctul $A(x_A, 0)$, trebuie ca $f(x_A) = g(x_A) = 0$. Rezultă

$$(m-1)(x_A - 1) = 0.$$

Cum pentru $m = 1$, $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă $x_A = 1$, de unde $m = -2$.

Răspuns corect: (d). $\square$

2. Fie mulţimea M a acelor $a \in [1, 2)$ pentru care ecuaţia

$$2^x - a^x = \sqrt{(2a)^x - a^{2x}}$$

admite doar soluţii numere naturale. Atunci M conţine:

(a) un element; (b) două elemente; (c) o infinitate de elemente; (d) niciun element.

Soluţie. Condiţie de existenţă a radicalului: $x \geq 0$. Se împarte ecuaţia la a^x şi se face substituţia $\left(\frac{2}{a}\right)^x = y$. Se obţine ecuaţia

$$y - 1 = \sqrt{y-1},$$

cu soluţiile 1 şi 2. Atunci $x = 0$ sau $x = \dfrac{1}{1 - \log_2 a}$. Pentru $a = 2^{\frac{n-1}{n}}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ se obţine $x = n$. Răspuns corect: (c).

3. Fie şirul (a_n) dat prin:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{2}{3}, & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ q \cdot a_n, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Atunci valoarea lui $q \in (0, 1)$ pentru care mulţimea termenilor şirului (a_n) conţine un număr finit de elemente este:

(a) nu există; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) $\dfrac{1}{3}$; (d) $\dfrac{2}{3}$.

Soluţie. Şirul a_n se poate scrie în forma generală

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + r, & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ q \cdot a_n, & \text{dacă } n \text{ este impar,} \end{cases}$$

unde $q, r \in \mathbb{R}$. Atunci rezultă inductiv

$$a_{2n-1} = q^{n-1} + r\frac{1-q^{n-1}}{1-q} = q^{n-1}\left(1 - \frac{r}{1-q}\right) + \frac{r}{1-q}$$

şi

$$a_{2n} = a_{2n-1} + r = q^{n-1}\left(1 - \frac{r}{1-q}\right) + \frac{r}{1-q} + r.$$

Pentru ca mulţimea termenilor şirului (a_n) să conţină un număr finit de elemente trebuie ca

$$1 - \frac{r}{1-q} = 0$$

sau, echivalent,

$$q = 1 - r.$$

În cazul nostru, rezultă $q = \frac{1}{3}$.

Răspuns corect: (c). □

4. Soluţia ecuaţiei

$$\frac{\log_a x}{\log_b x \cdot \log_c x} = \frac{\log_a b}{1 - \log_c a + \log_c b},$$

unde $a, b, c > 1$, $a \neq bc$, este:

(a) nu există; (b) 1; (c) $\frac{a}{bc}$; (d) $\frac{bc}{a}$.

Soluţie. Se observă că trebuie să impunem $x > 0$, $x \neq 1$.

Avem atunci

$$\frac{\log_a x}{\log_b x} = \frac{\frac{\ln x}{\ln a}}{\frac{\ln x}{\ln b}} = \frac{\ln b}{\ln a} = \log_a b.$$

Cum $b > 1$, avem că $\log_a b > 0$, deci putem împărţi ecuaţia iniţială prin $\log_a b$ şi obţinem

$$\log_c x = 1 - \log_c a + \log_c b,$$
$$\log_c x = \log_c \frac{bc}{a}.$$

Răspuns corect: (d). □

5. Considerăm inecuaţia:

$$3^x + a^x \leq 2^x + 6^x.$$

Atunci inecuaţia este satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă valoarea parametrului $a > 0$ este:

(a) 3; (b) nu există; (c) 6; (d) 4.

Soluţie. Să observăm că, pentru $a = 4$, avem că

$$3^x + 4^x \leq 2^x + 6^x$$

este echivalent cu

$$(3^x - 2^x) \cdot (2^x - 1) \geq 0,$$

ceea ce este evident adevărat pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Invers, pentru ca inecuaţia să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, trebuie ca funcţia

$$f(x) = 2^x + 6^x - 3^x - a^x$$

să aibă valori pozitive pentru orice x real. Cum $f(0) = 0$, rezultă că 0 este minim global pentru f pe $\mathbb{R}$. Rezultă din Teorema lui Fermat că

$$f'(0) = 0,$$

de unde

$$\begin{aligned} \ln 2 + \ln 6 - \ln a - \ln 3 &= 0, \\ \ln \frac{4}{a} &= 0, \\ a &= 4. \end{aligned}$$

Răspuns corect: (d). $\square$

6. Maximul valorilor lui x pentru care termenul din mijloc al dezvoltării

$$\left(x + x^{\log_6 x}\right)^4$$

este 6^{13} este:

(a) 6^{-3}; (b) 36; (c) 6^3; (d) 1.

Soluţie. Observăm că termenul din mijloc al dezvoltării este

$$T_2 = C_4^2 \cdot x^2 \cdot x^{2\log_6 x}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} 6 \cdot x^{2(1+\log_6 x)} &= 6^{13}, \\ 2\log_6 x\,(1 + \log_6 x) &= 12. \end{aligned}$$

Impunem $x > 0$ şi notăm $\log_6 x = y$. Rezultă $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, de unde $x_1 = 36$, $x_2 = \dfrac{1}{216}$.

Răspuns corect: (b). $\square$

7. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2mx^3 - 9x^2 + 12x + 3$. Mulţimea valorilor lui m pentru care funcţia este bijectivă este:

(a) $\left[\dfrac{9}{8}, \infty\right)$; (b) $\mathbb{R}$; (c) $\left(-\infty, \dfrac{9}{8}\right]$; (d) $\left(\dfrac{9}{8}, \infty\right)$.

Soluţie. Se observă că funcţia este surjectivă pentru orice $m \neq 0$.

Expresia derivatei este

$$f'(x) = 6mx^2 - 18x + 12 = 6(mx^2 - 3x + 2).$$

Pentru ca funcţia să fie injectivă, ar trebui ca derivata să păstreze semn constant pentru orice $m \in \mathbb{R}$, adică

$$\Delta_m = 9 - 8m \leq 0,$$

sau $m \geq \dfrac{9}{8}$.

Răspuns corect: (a). $\square$

8. Numărul de elemente ale mulţimii

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} |\ \exists n \in \mathbb{N} : z = (\sqrt[4]{3} + i\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i^2\sqrt[4]{2}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt[4]{3} + i^{4n}\sqrt[4]{2}) \right\}$$

este:

(a) infinit; (b) 1; (c) 3; (d) 2.

Soluţie. Să observăm că

$$\begin{aligned}
&(\sqrt[4]{3} + i^{4n}\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i^{4n-1}\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i^{4n-2}\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i^{4n-3}\sqrt[4]{2}) \\
&= (\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - i\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i\sqrt[4]{2}) \\
&= (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: (b). $\square$

9. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $X^3 - 3X + a$ are număr maxim de rădăcini întregi este:

(a) $\mathbb{R}$; (b) $\{\pm 2\}$; (c) $\{2\}$; (d) $\{-2\}$.

Soluţie. Din relaţiile lui Viete, rezultă

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3 \\ x_1x_2x_3 = -a. \end{cases}$$

De aici, deducem că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$. Polinomul poate avea maxim 3 rădăcini întregi, iar asta se întâmplă atunci când pătratele a două dintre ele sunt 1, iar pătratul celei de a treia e 4. Folosind şi $x_1+x_2+x_3=0$, rezultă ca posibile triplete de rădăcini $(-1,-1,2)$ şi $(1,1,-2)$. Din ultima relaţie a lui Viete, avem $a=\pm 2$.

Răspuns corect: (b). □

10. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este un parametru real. Mulţimea valorilor lui x pentru care $A(x)$ este egală cu inversa sa este:

(a) nu există; (b) $\left\{0,-\dfrac{1}{2}\right\}$; (c) $\{0\}$; (d) $\left\{0,\pm\dfrac{1}{2}\right\}$.

Soluţie. Impunem

$$A(x)\cdot A(x)=I_3,$$

de unde

$$A(4x^2+2x)=I_3.$$

Rezultă $4x^2+2x=0$, de unde $x\in\left\{0,-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Răspuns corect: (b). □

11. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Media geometrică a rădăcinilor ecuaţiei:

$$\det\left(A^3-xI_3\right)=0$$

este:

(a) 0; (b) 1; (c) -4; (d) -2.

Soluţie. Observăm că

$$A^3=\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -2\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix},$$

de unde ecuaţia $\det(A^3-xI_3)=0$ are rădăcinile $\pm 2\sqrt{2}$ şi 8. Rezultă că media căutată are valoarea -4.

Răspuns corect: (c). □

12. Fie A o matrice de ordinul 3 cu elementele egale cu ± 1. Atunci valoarea maximă pentru $\det A$ este:

(a) 2; (b) 4; (c) 6; (d) 8.

Soluţie. Să observăm că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Determinanţii de ordinul 2 pot fi $\pm 2,\ 0$. Dacă doi dintre ei sunt 2, al treilea este 0. Rezultă că valoarea maximă este 4. Se atinge, de exemplu, pentru matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: (b). □

13. Fie $M = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$ şi operaţia internă

$$x * y = xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}, \quad \forall x, y \in M.$$

Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

(a) elementul neutru este 1, singurul element care are invers este 1;
(b) elementul neutru este 1, nici un element nu are invers;
(c) nu există element neutru;
(d) da, elementul neutru este 1, toate elementele sunt inversabile.

Soluţie. Determinăm elementul neutru e :

$$\begin{aligned} x * e = x, &\quad \forall x \in M \\ &\Rightarrow xe + \sqrt{(x^2-1)(e^2-1)} = x, \quad \forall x \in M \\ &\Rightarrow e = 1. \end{aligned}$$

Se observă că 1 are invers: $1 * 1 = 1$ (inversul lui 1 este 1).

Dacă $x > 1 \Rightarrow x * y = xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)} \geq xy \geq x > 1$, $\forall y \in M$.

Deci oricare element diferit de 1 nu are invers.

Răspuns corect (a). □

14. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{Z}_7$ pentru care polinomul

$$f = X^6 + aX + \hat{5}$$

este reductibil este:

(a) $\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$; (b) $\mathbb{Z}_7 \setminus \{\hat{0}\}$; (c) $\emptyset$; (d) $\mathbb{Z}_7$.

Soluţie. Se observă că polinomul

$$g = f + \hat{1}$$

are proprietatea că

$$g(b) = b \cdot a, \quad \forall b \in \{\hat{1}, ..., \hat{6}\}.$$

Cum orice element din $\mathbb{Z}_7 \setminus \{\hat{0}\}$ este inversabil, rezultă că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{\hat{0}\}$, există un $b = a^{-1} \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{\hat{0}\}$ astfel încât $g(b) = \hat{1}$, adică $f(b) = \hat{0}$, adică f este reductibil.

Pentru $a = \hat{0}$,

$$f = X^6 + \hat{5}$$

are proprietatea că, deşi nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$, este reductibil, deoarece se poate scrie ca

$$\left(X^3 + \hat{3}\right)\left(X^3 + \hat{4}\right).$$

Răspuns corect: (d). $\square$

15. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dat prin

$$a_n := \int_0^\pi \sin^n x \; dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atunci limita

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_{2n} \cdot a_{2n-1}$$

are valoarea:

(a) 0; (b) 1; (c) ∞; (d) π.

Soluţie. Se observă imediat că

$$a_0 = \pi \text{ şi } a_1 = 2.$$

Pentru $n \geq 2$, avem

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^\pi \sin^n x \; dx = (-\cos x) \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \; dx \\ &= (n-1) a_n - (n-1) a_{n-2}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{n-1}{n}, \quad \forall n \geq 2.$$

De aici, obţinem

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} \cdot \frac{a_{2n-2}}{a_{2n-4}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_0} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2},$$

de unde

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \pi,$$

şi

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-3}} \cdot \frac{a_{2n-3}}{a_{2n-5}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_3}{a_1} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{1},$$

de unde

$$a_{2n-1} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \cdot 2.$$

Rezultă că limita căutată are valoarea π.

Răspuns corect: (d). □

16. Fie şirul

$$a_n = \left\{ \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.) Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ are valoarea:

(a) 0; (b) 1; (c) $2-\sqrt{3}$; (d) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Soluţie. Se observă că

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{Z}.$$

Atunci

$$\left\{ \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\} + \left(2-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{Z}$$

şi aparţine intervalului $\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^n, \left(2-\sqrt{3}\right)^n + 1\right) \subset (0,2)$. În concluzie, numărul este egal cu 1 şi deci

$$a_n = 1 - \left(2-\sqrt{3}\right)^n,$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Răspuns corect (b).

17. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}}$$

este:

(a) 0;   (b) 1;   (c) ∞;   (d) 2.

Soluţie. Vom folosi şirul

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

despre care ştim că este convergent la un număr real c (constanta lui Euler).

Atunci

$$\ell = \lim_{n\to\infty} e^{c_{2n} - c_n + \ln 2} = e^{\ln 2} = 2.$$

Răspuns corect: (d). □

18. Valoarea limitei:

$$\ell = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x\right)$$

este:

(a) 0;   (b) 1;   (c) 2;   (d) ∞.

Soluţie. Se observă că $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5} - x\right) = 1$.

Atunci

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} - (x+1)\right)^x \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - (x+1)\right)\cdot x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + (x+1)}\cdot x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + (x+1)} = 2.\end{aligned}$$

Răspuns corect: (c). □

19. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_t^{2t} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}\, dx$$

este:

(a) 0;   (b) 1;   (c) 2;   (d) 3.

Soluţie. Se observă că funcţia de sub integrală poate fi prelungită prin continuitate în 0 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x},\ x \neq 0 \\ 2,\ x = 0. \end{cases}$$

Deci, f admite primitive. Fie F o primitivă a sa. Atunci

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{t\to 0}\frac{F(2t)-F(t)}{t} = \lim_{t\to 0} 2\frac{F(2t)-F(0)}{2t} - \frac{F(t)-F(0)}{t} \\ &= 2F'(0)-F'(0) = f(0) = 2.\end{aligned}$$

Răspuns corect: (c). □

20. Numărul k al perechilor ordonate $(m,n)\in\mathbb{R}^2$ astfel încât $P(x) = x^3-3mx+n$ să aibă o rădăcină reală dublă şi $\int\limits_0^2 P(x)\,dx = 2$ este:

(a) $k=1$; (b) $k=2$; (c) $k=0$; (d) $k=4$.

Soluţie. Avem:

$$\int\limits_0^2 (x^3-3mx+n)dx = 2 \Rightarrow 4-6m+2n = 2 \Rightarrow 3m-n = 1.$$

Din $P'(x) = 3x^2-3m = 0$ rezultă $m\geq 0$ şi $x = \pm\sqrt{m}$.

Pentru $x=\sqrt{m}$ şi $P(\sqrt{m}) = 0 \Rightarrow n = 2m\sqrt{m}$. Din cele două relaţii rezultă $m=1$, $n=2$.

Pentru $x = -\sqrt{m}$ şi $P(-\sqrt{m}) = 0 \Rightarrow n = -2m\sqrt{m}$. Din cele două relaţii rezultă $m=\frac{1}{4}$, $n = -\frac{1}{4}$

Se obţine $(m,n) = (1,2)$ şi $(m,n) = \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}\right) \Rightarrow k = 2$.

Răspuns corect: (b). □

21. Considerăm, pentru parametrul $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, familia de funcţii

$$f_m(x) = (m-1)x^2+2mx+(m+1).$$

Valoarea minimă a lungimii segmentului $[OV_m]$, unde prin V_m am notat vârful parabolei asociate funcţiei f_m, este:

(a) 0; (b) $\frac{1}{2}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (d) 1.

Soluţie. Rezultă $V_m\left(-\frac{m}{m-1}, -\frac{1}{m-1}\right)$. Atunci valoarea minimă a lungimii segmentului $[OV_m]$ se atinge când $\frac{m^2+1}{(m-1)^2}$ este minimă sau, echivalent, când $\frac{m}{(m-1)^2}$ are valoarea minimă. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $g(m) = \dfrac{m}{(m-1)^2}$. Tabelul de variaţie este:

m	$-\infty$		-1		1		∞
$g'(m)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	$\vert$	$- - - -$	
$g(m)$		$\searrow\searrow\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow\nearrow\nearrow$	$\vert$	$\searrow\searrow\searrow$	

Cum $\lim_{m\to\infty} g(m) = 0$, rezultă că valoarea minimă a distanţei căutate se atinge pentru $m = -1$ şi are valoarea $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Răspuns corect: (c). □

22. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Atunci $f^{(2016)}(0)$ este egală cu:

(a) 1; (b) -1; (c) 0; (d) 2.

Soluţie. Se observă că $f'_s(0) = 0$ şi

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0,$$

de unde f este derivabilă în 0 şi $f'(0) = 0$. Atunci

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Inductiv, presupunem că f este derivabilă de $n-1$ ori în 0. Atunci

$$f^{(n-1)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \cdot P\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Rezultă $f_s^{(n)}(0) = 0$ şi

$$\begin{aligned} f_d^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1}{x^2} \cdot P\left(\dfrac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x}} \cdot P'\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= \lim_{y\to\infty} e^{-y} \cdot Q(y) = 0. \end{aligned}$$

Rezultă că f este derivabilă de ordinul n în 0 şi $f^{(n)}(0) = 0$.

Răspuns corect: (c). $\square$

23. Fie, pentru $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k = \int_0^1 \{nx\}^k \, dx.$$

Atunci $\lim\limits_{k\to\infty} I_k$ este:

(a) 0; (b) 1; (c) ∞; (d) $\dfrac{\pi}{2}$.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 \{nx\}^k \, dx \overset{nx=y}{=} \frac{1}{n}\int_0^n \{y\}^k \, dy = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1} (y-[y])^k \, dy \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1} (y-i)^k \, dy = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left.\frac{(y-i)^{k+1}}{k+1}\right|_i^{i+1} = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Răspuns corect (a). $\square$

24. Valoarea limitei:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left[\ln(n+1) + 2\ln(n+2) + ... + n\ln(2n)\right] - \frac{1}{2}\ln n$$

este:

(a) 0; (b) 1; (c) $\dfrac{1}{2}$; (d) $\dfrac{1}{4}$.

Soluţie. Se observă că limita poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{1}{n^2}\left[\ln(n+1) - \ln n + 2\ln(n+2) - 2\ln n + ... + n\ln(2n) - n\ln n\right] \\ &+ \left[\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2}\right]\ln n. \end{aligned}$$

Ultimul termen al sumei este

$$\frac{\ln n}{2n} \to 0,$$

deci limita căutată este

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} \cdot \ln\left(1+\frac{i}{n}\right) \\
&= \int_0^1 x \ln(1+x)\ dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\ dx \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\ dx \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: (d). □

25. Considerăm punctele $A(8,0)$ şi $B(0,6)$. Coordonatele punctului C aflat în cadranul I pe cercul de diametru AB pentru care aria triunghiului ABC este maximă sunt:

(a) $(-1,1)$; (b) $(7,7)$; (c) $(5,6)$; (d) $(4,3)$.

Soluţie. Se observă că, dacă punctul C are coordonatele (x_C, y_C), acestea trebuie să satisfacă:

$$(x_C - 4)^2 + (y_C - 3)^2 = 25.$$

De asemenea, pentru ca aria triunghiului ABC să fie maximă, trebuie ca înălţimea corespunzătoare ipotenuzei AB să fie maximă, ceea ce se întâmplă atunci când triunghiul ABC este isoscel. Rezultă $C(7,7)$.

Răspuns corect: (b). □

26. Notăm cu S suma valorilor parametrului real m pentru care vârfurile parabolelor $y = x^2 - 2mx + 1$ se află pe una din elipsele cu centrul în origine şi având semiaxele egale cu 1, respectiv $\sqrt{2}$. Atunci S este element al mulţimii:

(a) $\mathbb{N}$; (b) $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; (c) $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$; (d) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Soluţie. Vârfurile parabolelor au coordonatele $(m, 1-m^2)$. Ele trebuie să satisfacă una din ecuaţiile

$$\begin{aligned}
2x^2 + y^2 &= 2, \\
x^2 + 2y^2 &= 2.
\end{aligned}$$

Obţinem soluţiile $m = \pm 1$, respectiv $m \in \left\{0, \pm\sqrt{3}\right\}$. Rezultă $S = 0$, deci răspuns corect (a).

27. În planul xOy se consideră punctele $A(8,0)$, $B(0,6)$ şi $M(x,y)$. Minimul sumei MA^2+MB^2 când M aparţine dreptei de ecuaţie $x=y$ este:
(a) 49; (b) 60; (c) 51; (d) 10.
Soluţie. Se observă că, dacă notăm cu (a,a) coordonatele lui M, avem

$$MA^2+MB^2=(a-8)^2+a^2+a^2+(a-6)^2=4a^2-28a+100.$$

Valoarea minimului acestei funcţii este

$$-\frac{(-28)^2-4\cdot 4\cdot 100}{4\cdot 4}=51.$$

Răspuns corect: (c). $\square$

28. Numărul valorilor ale lui m pentru care ecuaţia

$$(\sin x-m)^2+\left(\sin x-m^2+2m-2\right)^2=0$$

are soluţii este:
(a) 2; (b) 1; (c) 0; (d) infinit.
Soluţie. Se observă că expresia de mai sus e o sumă de pătrate, care poate fi 0 doar dacă

$$\sin x=m=m^2-2m+2.$$

Din ultima relaţie obţinem $m\in\{1,2\}$, dintre care convine doar $m=1$.
Răspuns corect: (b). $\square$

29. Valoarea expresiei

$$E=\left(\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{2016}$$

este:
(a) $1+i\sqrt{3}$; (b) 2^{-1008}; (c) 1; (d) 2^{1008}.
Soluţie. Se observă că

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

şi

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}.$$

Aplicând formula lui Moivre, rezultă

$$E = 2^{-1008} \cdot \left(\frac{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} \right)^{2016} = 2^{-1008} \cdot \frac{\left(\cos \frac{3\cdot 2016\pi}{4} + i \sin \frac{3\cdot 2016\pi}{4}\right)}{\left(\cos \frac{2016\pi}{3} + i \sin \frac{2016\pi}{3}\right)} = 2^{-1008}.$$

Răspuns corect: (b). □

30. Se consideră unghiurile ascuţite α, β, γ a căror sumă este $\pi/2$. Ştiind că numerele $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ sunt în progresie aritmetică, să se precizeze valoarea produsului $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma$.

(a) $\sin\beta + \cos\beta$; (b) $\operatorname{tg}\beta$; (c) $\operatorname{ctg}\beta$; (d) 3.

Soluţie. Se observă că

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma}.$$

Pe de altă parte,

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{tg}\beta$$

şi

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma = 2\operatorname{ctg}\beta.$$

Rezultă

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{2\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma - 1},$$

de unde deducem că $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma = 3$.

Răspuns corect: (d). □