Model 7 test admitere AC

1. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care graficele funcţiilor $f(x) = x^2 + mx + 1$ şi $g(x) = x^2 + x + m$ se intersectează pe axa Ox este:
(a) 0; (b) 1; (c) -1; (d) -2.

2. Fie mulţimea M a acelor $a \in [1, 2)$ pentru care ecuaţia

$$2^x - a^x = \sqrt{(2a)^x - a^{2x}}$$

admite doar soluţii numere naturale. Atunci M conţine:
(a) un element; (b) două elemente; (c) o infinitate de elemente; (d) niciun element.

3. Fie şirul (a_n) dat prin:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{2}{3}, & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ q \cdot a_n, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Atunci valoarea lui $q \in (0, 1)$ pentru care mulţimea termenilor şirului (a_n) conţine un număr finit de elemente este:
(a) nu există; (b) $\frac{1}{2}$; (c) $\frac{1}{3}$; (d) $\frac{2}{3}$.

4. Soluţia ecuaţiei

$$\frac{\log_a x}{\log_b x \cdot \log_c x} = \frac{\log_a b}{1 - \log_c a + \log_c b},$$

unde $a, b, c > 1$, $a \neq bc$, este:
(a) nu există; (b) 1; (c) $\frac{a}{bc}$; (d) $\frac{bc}{a}$.

5. Considerăm inecuaţia:

$$3^x + a^x \leq 2^x + 6^x.$$

Atunci inecuaţia este satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă valoarea parametrului $a > 0$ este:
(a) 3; (b) nu există; (c) 6; (d) 4.

6. Maximul valorilor lui x pentru care termenul din mijloc al dezvoltării

$$\left(x + x^{\log_6 x}\right)^4$$

este 6^{13} este:

(a) 6^{-3}; (b) 36; (c) 6^3; (d) 1.

7. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2mx^3-9x^2+12x+3$. Mulţimea valorilor lui m pentru care funcţia este bijectivă este:

(a) $\left[\frac{9}{8},\infty\right)$; (b) $\mathbb{R}$; (c) $\left(-\infty,\frac{9}{8}\right]$; (d) $\left(\frac{9}{8},\infty\right)$.

8. Numărul de elemente ale mulţimii

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}|\ \exists n\in\mathbb{N}: z=(\sqrt[4]{3}+i\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}+i^2\sqrt[4]{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt[4]{3}+i^{4n}\sqrt[4]{2})\right\}$$

este:

(a) infinit; (b) 1; (c) 3; (d) 2.

9. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul X^3-3X+a are număr maxim de rădăcini întregi este:

(a) $\mathbb{R}$; (b) $\{\pm2\}$; (c) $\{2\}$; (d) $\{-2\}$.

10. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este un parametru real. Mulţimea valorilor lui x pentru care $A(x)$ este egală cu inversa sa este:

(a) nu există; (b) $\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$; (c) $\{0\}$; (d) $\left\{0,\pm\frac{1}{2}\right\}$.

11. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Media geometrică a rădăcinilor ecuaţiei:

$$\det\left(A^3-xI_3\right)=0$$

este:

(a) 0; (b) 1; (c) -4; (d) -2.

12. Fie A o matrice de ordinul 3 cu elementele egale cu ±1. Atunci valoarea maximă pentru $\det A$ este:

(a) 2; (b) 4; (c) 6; (d) 8.

13. Fie $M=\{x; x\in\mathbb{R},\ x\geq 1\}$ şi operaţia internă

$$x*y=xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)},\quad \forall x,y\in M.$$

Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

(a) elementul neutru este 1, singurul element care are invers este 1;

(b) elementul neutru este 1, nici un element nu are invers;
(c) nu există element neutru;
(d) da, elementul neutru este 1, toate elementele sunt inversabile.

14. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{Z}_7$ pentru care polinomul

$$f = X^6 + aX + \hat{5}$$

este reductibil este:
(a) $\left\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\right\}$; (b) $\mathbb{Z}_7 \setminus \left\{\hat{0}\right\}$; (c) $\emptyset$; (d) $\mathbb{Z}_7$.

15. Fie şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dat prin

$$a_n := \int_0^\pi \sin^n x \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atunci limita

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot a_{2n} \cdot a_{2n-1}$$

are valoarea:
(a) 0; (b) 1; (c) ∞; (d) π.

16. Fie şirul de termen general

$$a_n = \left\{ \left(2 + \sqrt{3}\right)^n \right\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.) Atunci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ are valoarea:
(a) 0; (b) 1; (c) $2 - \sqrt{3}$; (d) $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

17. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}}$$

este:
(a) 0; (b) 1; (c) ∞; (d) 2.

18. Valoarea limitei:

$$\ell = \lim_{x \to \infty} x \ln\left(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x\right)$$

este:
(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) ∞.

19. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}\, dx$$

este:

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3.

20. Numărul k al perechilor ordonate $(m,n) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $P(x) = x^3 - 3mx + n$ să aibă o rădăcină reală dublă şi $\int\limits_0^2 P(x)\, dx = 2$ este:

(a) $k=1$; (b) $k=2$; (c) $k=0$; (d) $k=4$.

21. Considerăm, pentru parametrul $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, familia de funcţii

$$f_m(x) = (m-1)x^2 + 2mx + (m+1).$$

Valoarea minimă a lungimii segmentului $[OV_m]$, unde prin V_m am notat vârful parabolei asociate funcţiei f_m, este:

(a) 0; (b) $\frac{1}{2}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (d) 1.

22. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \le 0. \end{cases}$$

Atunci $f^{(2016)}(0)$ este egală cu:

(a) 1; (b) -1; (c) 0; (d) 2.

23. Fie, pentru $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k = \int\limits_0^1 \{nx\}^k\, dx.$$

Atunci $\lim\limits_{k \to \infty} I_k$ este:

(a) 0; (b) 1; (c) ∞; (d) $\frac{\pi}{2}$.

24. Valoarea limitei:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \left[\ln(n+1) + 2\ln(n+2) + ... + n\ln(2n)\right] - \frac{1}{2}\ln n$$

este:

(a) 0;   (b) 1;   (c) $\dfrac{1}{2}$;   (d) $\dfrac{1}{4}$.

25. Considerăm punctele $A(8,0)$ şi $B(0,6)$. Coordonatele punctului C aflat în cadranul I pe cercul de diametru AB pentru care aria triunghiului ABC este maximă sunt:
(a) $(-1,1)$;   (b) $(7,7)$;   (c) $(5,6)$;   (d) $(4,3)$.

26. Notăm cu S suma valorilor parametrului real m pentru care vârfurile parabolelor $y = x^2 - 2mx + 1$ se află pe una din elipsele cu centrul în origine şi având semiaxele egale cu 1, respectiv $\sqrt{2}$. Atunci S este element al mulţimii:
(a) $\mathbb{N}$;   (b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;   (c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$;   (d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

27. În planul xOy se consideră punctele $A(8,0)$, $B(0,6)$ şi $M(x,y)$. Minimul sumei $MA^2 + MB^2$ când M aparţine dreptei de ecuaţie $x = y$ este:
(a) 49; (b) 60; (c) 51; (d) 10.

28. Numărul valorilor ale lui m pentru care ecuaţia

$$(\sin x - m)^2 + \left(\sin x - m^2 + 2m - 2\right)^2 = 0$$

are soluţii este:
(a) 2; (b) 1; (c) 0; (d) infinit.

29. Valoarea expresiei

$$E = \left(\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{2016}$$

este:
(a) $1 + i\sqrt{3}$;   (b) 2^{-1008};   (c) 1;   (d) 2^{1008}.

30. Se consideră unghiurile ascuţite α, β, γ a căror sumă este $\pi/2$. Ştiind că numerele $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ sunt în progresie aritmetică, să se precizeze valoarea produsului $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma$.
(a) $\sin\beta + \cos\beta$; (b) $\operatorname{tg}\beta$; (c) $\operatorname{ctg}\beta$; (d) 3.